Škoda Auto Vysoká škola

Operační výzkum II

Přednášky

Jan Fábry

30.09.2025

Literatura

Škoda Auto Vysoká škola

Základní

- FÁBRY, J. Operační výzkum II pro prezenční a kombinovanou formu studia. 1. vyd. ŠAVŠ o.p.s., 2025. 251 s. ISBN 978-80-7654-082-8.

Doporučená

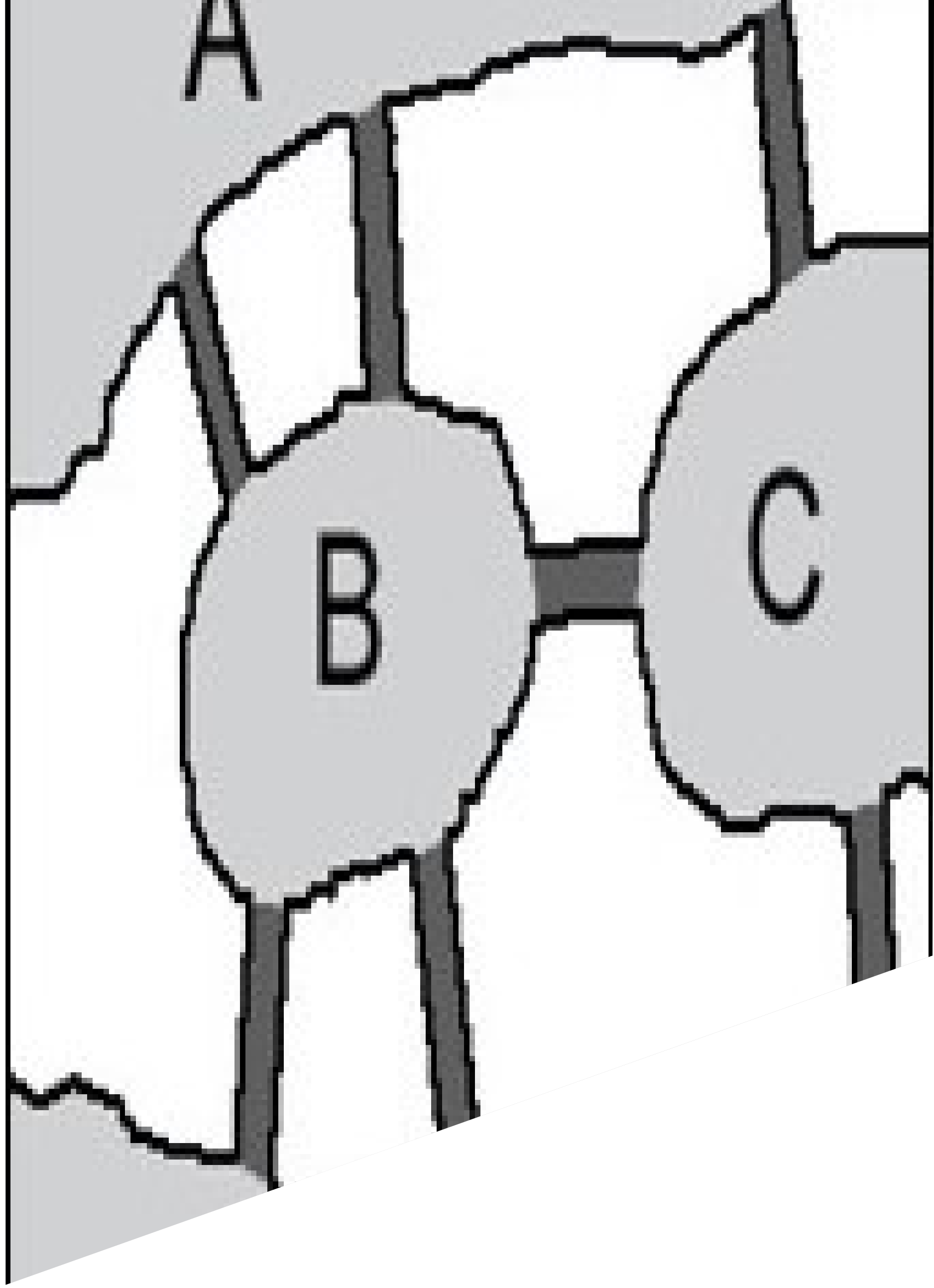
- FÁBRY, J. Operační výzkum pro prezenční a kombinovanou formu studia. 1. vyd. ŠAVŠ o.p.s., 2019. 164 s. ISBN 978-80-87042-84-7.
- JABLONSKÝ, J. *Operační výzkum.: Kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování*. 3. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. 323 s. ISBN 978-80-86946-44-3.
- EISELT, H. -- SANDBLOM, C. Operations Research.: A Model - Based Approach. 1. vyd. Heidelberg: Springer, 2010. ISBN 978-3-642-10325-4.
- HILLIER, F S. -- LIEBERMAN, G J. Introduction to operations research /: Eleventh edition. McGraw-Hill, 2021. 964 s. ISBN 9781260575873.
- BOUCHERIE, R J. -- BRAAKSMA, A. -- TIJMS, H C. Operations research: introduction to models and methods. World Scientific, 2022. ISBN 9789811239342.
- RARDIN, R L. Optimization in operations research /: Second edition. Pearson, 2018. 1144 s. ISBN 978-93-530-6636-9.

Obsah

Škoda Auto Vysoká škola

1

Úvod do operačního výzkumu



Úvod do operačního výzkumu

Škoda Auto Vysoká škola

Alternativní názvy v zahraniční literatuře

- Operational / Operations Research
- Management Science
- Operations Analysis
- Quantitative Analysis
- Quantitative Methods
- Systems Analysis
- Decision Analysis
- Decision Science
- Computer Science

Úvod do operačního výzkumu

Škoda Auto Vysoká škola

Definice

1. OV je aplikací vědeckých metod, technik a nástrojů na problémy zahrnující systémové operace, tak jako poskytnutí kontroly operacím s optimálním řešením úloh.
2. OV je aplikací vědeckých metod pro studium objemných úloh, složitých organizací nebo aktivit.
3. OV je aplikací vědeckých metod při analýze a řešení rozhodování manažerských problémů.

- **Shrnutí**
  - Aplikace VĚDĚCKÝCH METOD.
  - Studuje ROZSÁHLÉ & SLOŽITÉ METODY.
  - Analyzuje MANAŽERSKÉ PROBLÉMY.
  - Hledá OPTIMÁLNÍ ŘEŠENÍ.
  - Používá MATEMATICKÉ MODELY.
  - Používá POČÍTAČOVÉ & SPECIÁLNÍ SOFTWARE.

Úvod do operačního výzkumu

Škoda Auto Vysoká škola

Software

- MPL for Windows
- CPLEX (IBM ILOG)
- Gurobi
- MS Excel (FRONTLINE SOLVERS)
- AMPL
- Lingo (LINDO)
- XPRESS (FICO)
- AIMMS
- NEOS
- SIMPROCESS
- SIMUL 8
- Matlab

Úvod do operačního výzkumu

Škoda Auto Vysoká škola

Rozhodovací problém

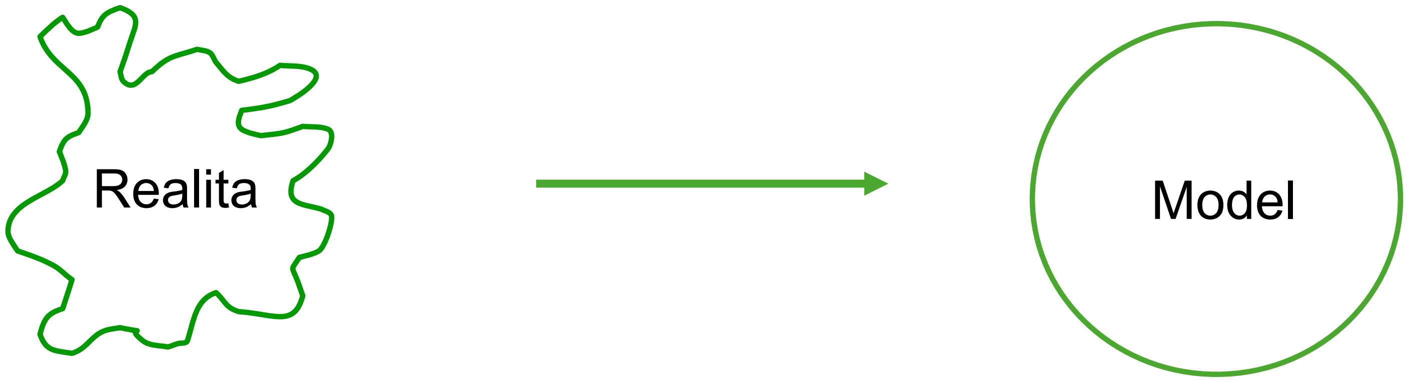
- Dvě nebo více možností.
- Výsledek = rozhodnutí.
- Systematický proces.

- **Definice problému**
- **Hledání možných řešení úlohy**
- **Vyhodnocení možností**
- **Zvolení jedné možnosti**

Úvod do operačního výzkumu

Škoda Auto Vysoká škola

Modelový přístup



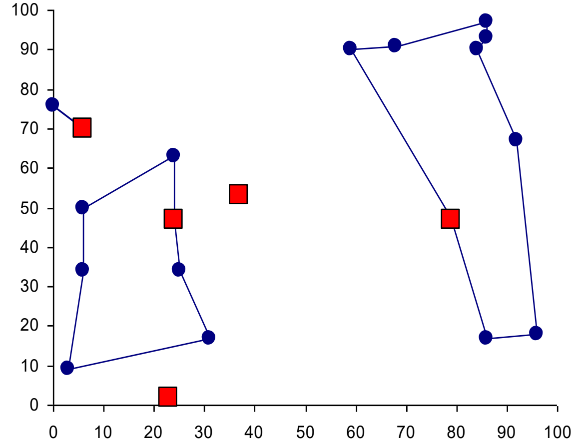
- Nalezení kompromisu mezi zjednodušením modelu a vhodnou úrovní věrného zachycení reality.

Úvod do operačního výzkumu

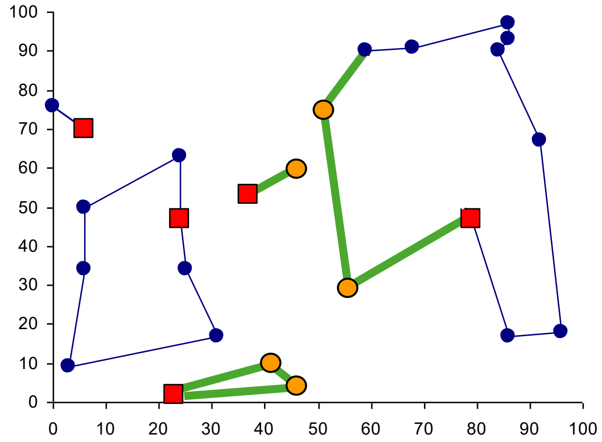
Škoda Auto Vysoká škola

Klasifikace modelů

- Deterministické – všechna data jsou s jistotou známa.
- Pravděpodobnostní (stochastické) – některé procesy nebo hodnoty se řídí zákony pravděpodobnostního charakteru.



- Statické – všechna data jsou známa předem (před samotným výpočtem).
- Dynamický – data mohou být změněna i po získání řešení.



Úvod do operačního výzkumu

Škoda Auto Vysoká škola

Lineární programování

- Reálný problém

- Definice problému
- Formulace ekonomického modelu

- Formulace matematického modelu

- Řešení úlohy

- Interpretace výsledků
- Verifikace modelu
- Validace modelu
- Analýza citlivosti

- Implementace

Úvod do operačního výzkumu

Škoda Auto Vysoká škola

Lineární programování

- **Ekonomický model**
  - Procesy.
  - Omezující podmínky.
  - Cíl.
- **Matematický model**
  - Proměnné – spojité, celočíselné, binární.
  - Omezující podmínky – rovnice, nerovnice.
  - Účelová funkce – max, min.
- **Řešení**
  - Přípustné – vyhovuje všem omezujícím podmínkám.
  - Optimální – přípustné řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce.
  - Nepřípustné – nesplňuje některou z omezujících podmínek.

Úvod do operačního výzkumu

Škoda Auto Vysoká škola

Lineární programování

- **Řešení**
  - Interpretace výsledků – vysvětlení získaných numerických výsledků (např. klientovi).
  - Verifikace modelu – porovnání matematického modelu s ekonomickým modelem.
  - Validace modelu – porovnání výsledků s reálnými očekáváními.
  - Analýza citlivosti – zkoumání důsledků změn vstupů na výstupy.
- **Implementace**
  - Použití výsledků v reálném systému.
- **Speciální případy úloh LP**
  - Jediné optimální řešení.
  - Více optimálních řešení.
  - Žádné optimální řešení.
  - Žádné přípustné řešení.

Úvod do operačního výzkumu

Škoda Auto Vysoká škola

Lineární programování

- **Značení**

$\mathbf{R}$ množina reálných čísel

$\mathbf{R}_+$ množina nezáporných reálných čísel

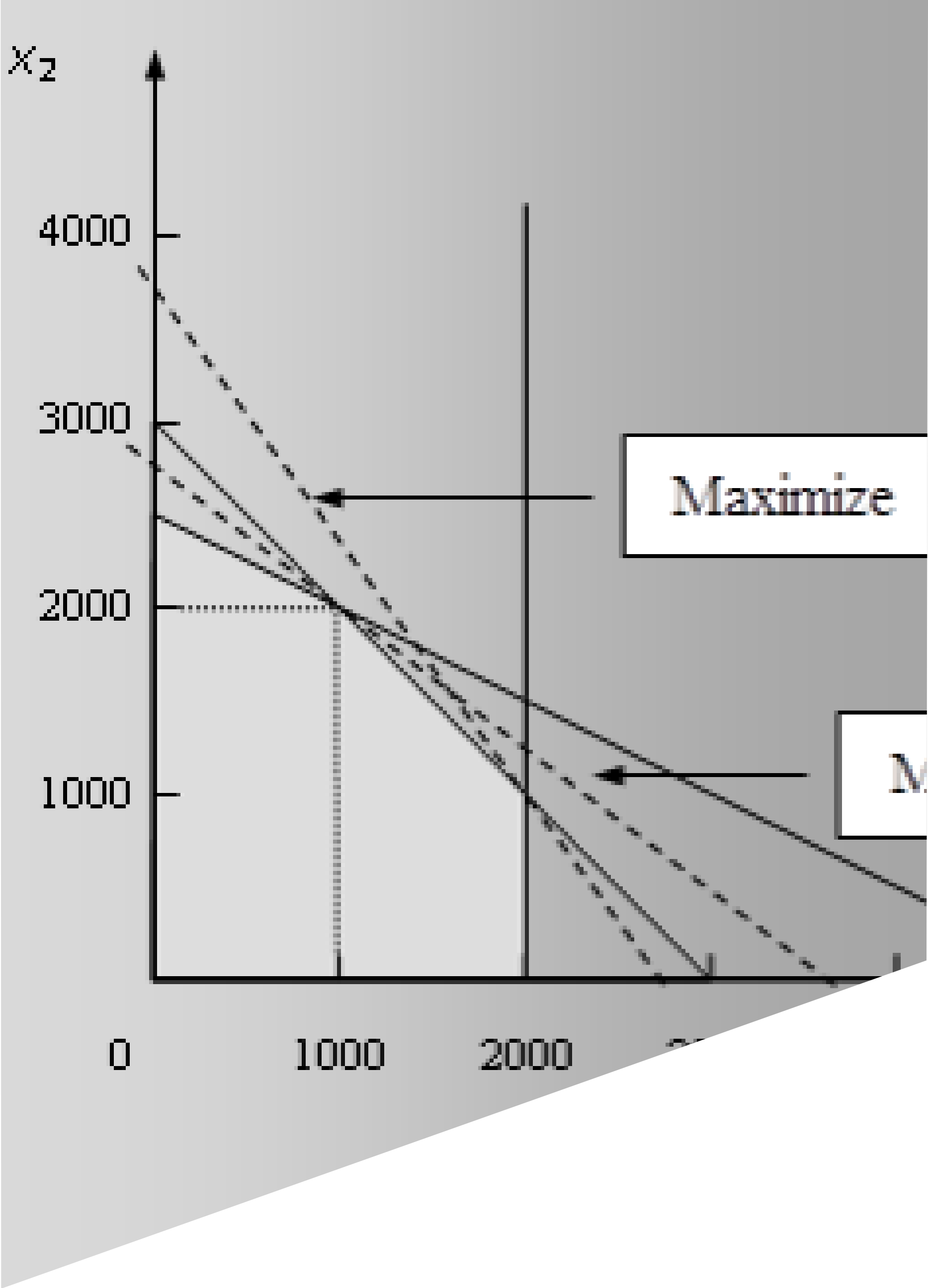
$\mathbf{Z}$ množina celých čísel

$\mathbf{Z}_+$ množina nezáporných celých čísel

$\mathbf{B}$ množina binárních čísel $\{0,1\}$

2

Úlohy výrobního plánování



Úlohy výrobního plánování

Škoda Auto Vysoká škola

Základní úloha výrobního plánování – zadání

- **Příklad**
  - Truhlárna vyrábí stoly a židle. Výrobní proces zahrnuje obrábění, broušení a montáž.
  - Komponenty stolu se obrábějí 5 hodin, brousí 4 hodiny a montují 3 hodiny.
  - Části židle se obrábějí 2 hodiny, brousí 3 hodiny a montují 4 hodiny.
  - K dispozici je 270 hodin pro obrábění, 250 hodin pro broušení a 200 hodin pro montáž.
  - Zisk z jednoho prodaného stolu je 100 € a z prodané židle 60 €.
  - Cílem je navrhnout výrobu tak, aby celkový zisk z prodaného nábytku byl co největší (předpokládáme, že se veškerá výroba prodá).

  - Jak se změní řešení, pokud ke každému vyrobenému stolu musíme vyrobit 4 židle?

Úlohy výrobního plánování

Škoda Auto Vysoká škola

Základní úloha výrobního plánování – formulace matematického modelu

- **Proměnné**

  x_1 = počet vyrobených stolů,

  x_2 = počet vyrobených židlí.

- **Matematický model**

$$z = 100x_1 + 60x_2 \to \max,$$

$$5x_1 + 2x_2 \le 270 \quad \text{(obrábění)},$$

$$4x_1 + 3x_2 \le 250 \quad \text{(broušení)},$$

$$3x_1 + 4x_2 \le 200 \quad \text{(montáž)},$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_1, x_2 & \ge 0 \\ x_1, x_2 - & \text{celé} \end{array}\right\} \text{resp. } x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_+.$$

Přídatné proměnné $\longrightarrow$

Ekvivalentní soustava rovnic

$$\begin{array}{lllll} 5x_1 + 2x_2 + x_3 & & & = 270 \\ 4x_1 + 3x_2 & + x_4 & & = 250 \\ 3x_1 + 4x_2 & & + x_5 & = 200 \end{array}$$

$\le$ + přídatná proměnná

$\ge$ - přídatná proměnná

Úlohy výrobního plánování

Základní úloha výrobního plánování – řešení

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

    $x_1 = 48$

    $x_2 = 14$

  - Hodnota účelové funkce

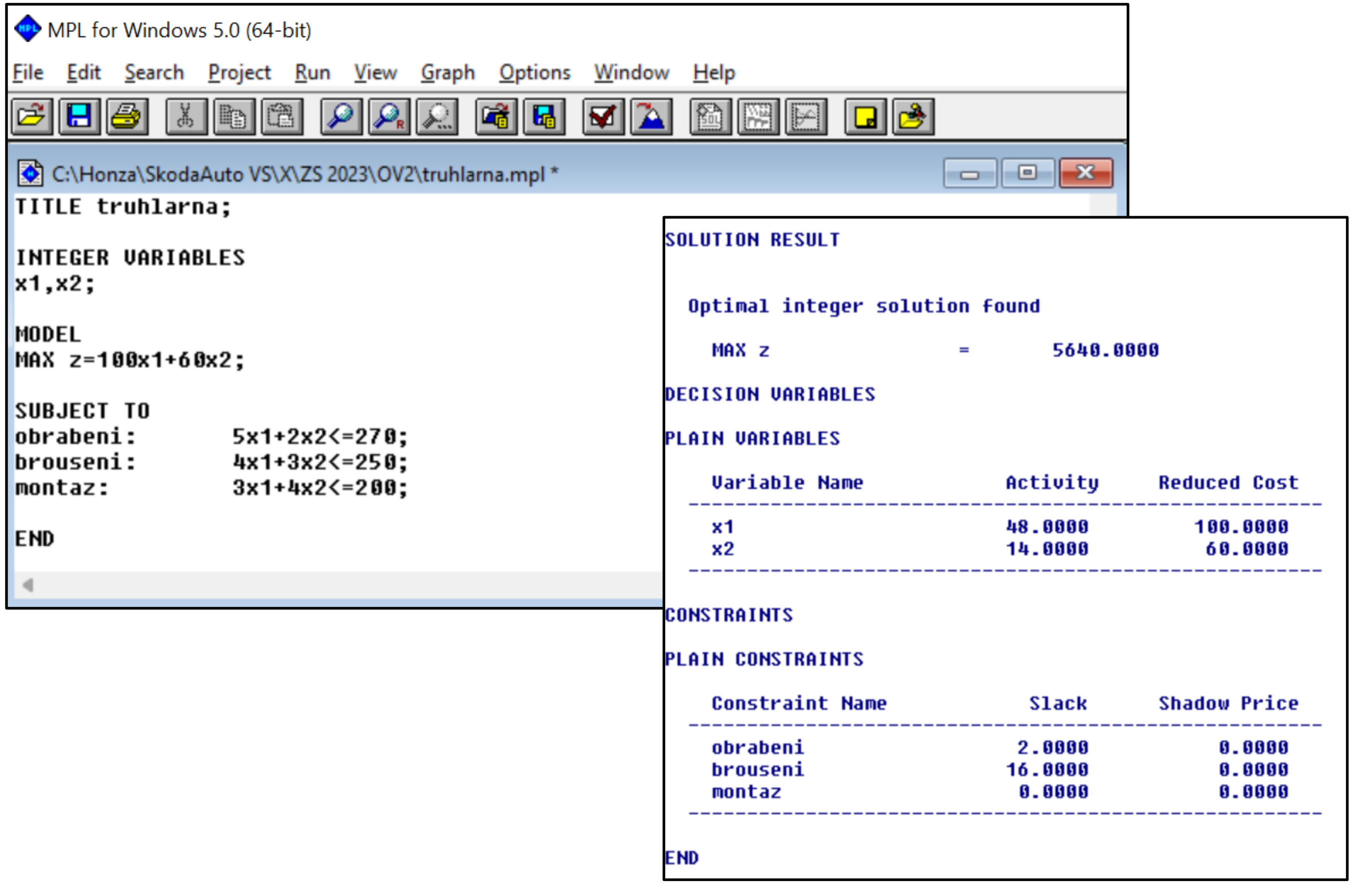
    $z_0 = 5640$

  - Přídatné proměnné

    $x_3 = 2$

    $x_4 = 16$

    $x_5 = 0$




```
TITLE truhlarna;

INTEGER VARIABLES
x1,x2;

MODEL
MAX z=100x1+60x2;

SUBJECT TO
obrabeni:      5x1+2x2<=270;
brouseni:      4x1+3x2<=250;
montaz:        3x1+4x2<=200;

END
```

```
SOLUTION RESULT

  Optimal integer solution found

    MAX z              =        5640.0000

DECISION VARIABLES

PLAIN VARIABLES

    Variable Name              Activity     Reduced Cost
  ---------------------------------------------------------
    x1                          48.0000         100.0000
    x2                          14.0000          60.0000
  ---------------------------------------------------------

CONSTRAINTS

PLAIN CONSTRAINTS

    Constraint Name               Slack     Shadow Price
  ---------------------------------------------------------
    obrabeni                     2.0000           0.0000
    brouseni                    16.0000           0.0000
    montaz                       0.0000           0.0000
  ---------------------------------------------------------

END
```

Úlohy výrobního plánování

Škoda Auto Vysoká škola

Základní úloha výrobního plánování – zadání, řešení

- **Matematický model**
  - Dodatečné omezení: Jak se změní řešení, pokud ke každému vyrobenému stolu musíme vyrobit 4 židle?

$$4x_1 = x_2 \qquad \text{(komplety)}$$

```
TITLE truhlarnaKomplety;

INTEGER VARIABLES
x1,x2;

MODEL
MAX z=100x1+60x2;

SUBJECT TO
obrabeni:       5x1+2x2<=270;
brouseni:       4x1+3x2<=250;
montaz:         3x1+4x2<=200;
komplety:       4x1-x2=0;

END
```

```
SOLUTION RESULT

  Optimal integer solution found

    MAX z              =       3400.0000

DECISION VARIABLES

PLAIN VARIABLES

    Variable Name              Activity       Reduced Cost
  --------------------------------------------------------
    x1                          10.0000           100.0000
    x2                          40.0000            60.0000
  --------------------------------------------------------

CONSTRAINTS

PLAIN CONSTRAINTS

    Constraint Name               Slack       Shadow Price
  --------------------------------------------------------
    obrabeni                   140.0000             0.0000
    brouseni                    90.0000             0.0000
    montaz                      10.0000             0.0000
    komplety                     0.0000             0.0000
  --------------------------------------------------------

END
```

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

$$x_1 = 10$$
$$x_2 = 40$$

  - Hodnota účelové funkce

$$z_0 = 3400$$

  - Přídatné proměnné

$$x_3 = 140$$
$$x_4 = 90$$
$$x_5 = 10$$

Úlohy výrobního plánování

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha výrobního plánování s polotovary – zadání

- **Příklad**
  - Firma vyrábí produkty P_1, P_2 a P_3.
  - Na výrobu 1 ks produktu P_1 se spotřebují 3 kg suroviny.
  - Na výrobu 1 ks produktu P_2 se spotřebují 2 kg suroviny a 1 ks produktu P_1.
  - Na výrobu 1 ks produktu P_3 se spotřebují 2 kg suroviny, 2 ks produktu P_1 a 1 ks produktu P_2.
  - K dispozici je 1000 kg suroviny.
  - Produkty P_1 a P_2, které se používají jako polotovary, lze prodávat samostatně.
  - Ceny produktů P_1, P_2 a P_3 jsou 5, 10 a 30 Kč. Cílem je maximalizovat celkové tržby z prodeje produktů.

Úlohy výrobního plánování

Úloha výrobního plánování s polotovary – zadání

- **Montážní tabulka**

Vstup	P_1	P_2	P_3
Surovina (kg)	3	2	2
P_1 (ks)	-	1	2
P_2 (ks)	-	-	1
Cena (Kč/ks)	5	10	30

Úlohy výrobního plánování

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha výrobního plánování s polotovary – formulace matematického modelu

- **Proměnné**

  $x_i =$ počet vyrobených produktů P_i $(i = 1, 2, 3)$

- **Matematický model**

$$z = 5x_1 + 5x_2 + 10x_3 \rightarrow \max \qquad \text{(celkové tržby)},$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 1000 \qquad \text{(spotřeba suroviny)},$$

$$x_1 \geq x_2 + 2x_3 \qquad \text{(spotřeba produktu } P_1\text{)},$$

$$x_2 \geq x_3 \qquad \text{(spotřeba produktu } P_2\text{)},$$

$$x_i \in \mathbf{Z}_+ \qquad i = 1, 2, 3.$$

```
TITLE polotovary;

INTEGER VARIABLES
x1,x2,x3;

MODEL
MAX z=5x1+5x2+10x3;

SUBJECT TO
Surovina:       3x1+2x2+2x3<=1000;
P1:             x1-x2-2x3>=0;
P2:             x2-x3>=0;

END
```

Úlohy výrobního plánování

Úloha výrobního plánování s polotovary – řešení

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

    $x_1 = 231$ (počet vyrobených produktů P_1)

    $x_2 = 77$ (počet vyrobených produktů P_2)

    $x_3 = 76$ (počet vyrobených produktů P_3)
  - Hodnota účelové funkce

    $z_0 = 2300$ (maximální celkové tržby v Kč)
  - Přídatné proměnné

    $x_4 = 1$ (zbyde 1 kg suroviny)

    $x_5 = 2$ (2 ks P_1 se prodají samostatně)

    $x_6 = 1$ (1 ks P_2 se prodá samostatně)

```
SOLUTION RESULT

  Optimal integer solution found

    MAX z              =       2300.0000

DECISION VARIABLES

PLAIN VARIABLES

    Variable Name           Activity     Reduced Cost
  -----------------------------------------------------
    x1                      231.0000           5.0000
    x2                       77.0000           5.0000
    x3                       76.0000          10.0000
  -----------------------------------------------------

CONSTRAINTS

PLAIN CONSTRAINTS

    Constraint Name            Slack     Shadow Price
  -----------------------------------------------------
    Surovina                  1.0000           0.0000
    P1                       -2.0000           0.0000
    P2                       -1.0000           0.0000
  -----------------------------------------------------
```

Úlohy výrobního plánování

Použití logických proměnných v matematickém modelu

- **Binární proměnné**
  - nabývají hodnoty 1 nebo 0,
  - lze je využít v matematickém modelu jako logické či rozhodovací proměnné:
    - vyrábí se / nevyrábí se,
    - používá se / nepoužívá se,
    - jedna varianta / druhá varianta,
    - apod.

Úlohy výrobního plánování

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha výrobního plánování s fixními náklady

- **Příklad**
  - Lze vyrábět n typů produktů na n výrobních linkách (každý produkt na jedné výrobní lince - VL).
  - Pokud se j-tý produkt vyrábí, pak lze vyrobit maximálně z_j ks.
  - Pokud je VL_j využita (tj. vyrábí se produkt j), účtují se fixní náklady f_j.
  - Jednotkový zisk z produktu typu j je c_j.
  - Jsou definované standardní (kapacitní) omezující podmínky úlohy výrobního plánování.
  - Cílem je maximalizovat celkový zisk z produkce snížený o fixní náklady.

Úlohy výrobního plánování

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha výrobního plánování s fixními náklady

- **Proměnné**

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{jestliže se produkt } j \text{ vyrábí} \left(\text{na } VL_j\right) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$y_j = \text{objem výroby produktu } j$$

- **Účelová funkce**

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j - \sum_{j=1}^{n} f_j x_j \quad \to \max$$

- **Omezující podmínky**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj} y_j \le b_l \qquad l = 1, 2, \dots, m \qquad \left(\text{kapacitní omezení}\right)$$

$$y_j \le z_j x_j \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

Pokud je $y_j > 0$, pak musí být $x_j = 1$

Pokud je $x_j = 0$, pak musí být $y_j = 0$

(Pokud není zadán limit z_j, použije se místo něj vysoká konstanta M)

$$x_j \in \mathbf{B} \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_j \in \mathbf{R}_+ \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

Úlohy výrobního plánování

Úloha výrobního plánování s alternativním pořadím výroby produktů

- Úloha je řešena s podmínkou platnosti různých soustav omezení (typ buď-nebo)
- **Příklad**
  - Tři různé produkty mohou být na stroji vyráběny buď v pořadí $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$ nebo $P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1$.
  - Předpokládejme, že výroba produktu P_i trvá t_i.
  - Formulujte omezující podmínky modelující přípustnou produkci.

Úlohy výrobního plánování

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha výrobního plánování s alternativním pořadím výroby produktů

- **Proměnné**

$y_i =$ okamžik začátku výroby produktu P_i

$$x = \begin{cases} 1 & \text{vyrábí-li se produkty v pořadí } P_1 \to P_2 \to P_3 \\ 0 & \text{vyrábí-li se produkty v pořadí } P_3 \to P_2 \to P_1 \end{cases}$$

- **Model**

$$y_1 + t_1 \le y_2 + M(1-x),$$
$$y_2 + t_2 \le y_3 + M(1-x),$$
$$y_3 + t_3 \le y_2 + Mx,$$
$$y_2 + t_2 \le y_1 + Mx,$$
$$y_i \in \mathbf{R}_+ \qquad i = 1,2,3,$$
$$x \in \mathbf{B}$$

$M =$ vysoká konstanta (∞)

Pokud se bude vyrábět podle první sekvence, pak $x = 1$, a první dvě podmínky zaručují splnění časových návazností výroby jednotlivých produktů. Další dvě omezení jsou splěna vždy (díky vysoké konstantě na pravé straně). Pokud se bude vyrábět podle druhé sekvence, je to přesně naopak.

Úlohy výrobního plánování

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha výrobního plánování se speciálními omezeními pro úroveň výroby

- **Příklad**
  - Firma zvažuje výrobu nového produktu.
  - V případě jeho výroby, úroveň musí být alespoň 500 ks a nesmí překročit 1000 ks.
- **Proměnné**

$$y = \text{úroveň výroby produktu}$$

$$x = \begin{cases} 1 & \text{jestliže firma bude produkt vyrábět} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- **Model**

$$500x \le y \le 1000x,$$

$$y \in \mathbf{Z}_+ \,,$$

$$x \in \mathbf{B}.$$

Úlohy výrobního plánování

Úloha výrobního plánování s plánováním diskrétní úrovně výroby

- **Příklad**
  - Firma zvažuje, zda vyrobit 500, 1000 nebo 2000 ks daného produktu.
- **Proměnné**

$$y = \text{úroveň výroby}$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{je-li výroba na } i\text{-té úrovni} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3$$

- **Model**

$$y = 500x_i + 1000x_2 + 2000x_3,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$y \in \mathbf{Z}_+ \;,$$

$$x_i \in \mathbf{B} \qquad i = 1, 2, 3.$$

Úlohy výrobního plánování

Škoda Auto Vysoká škola

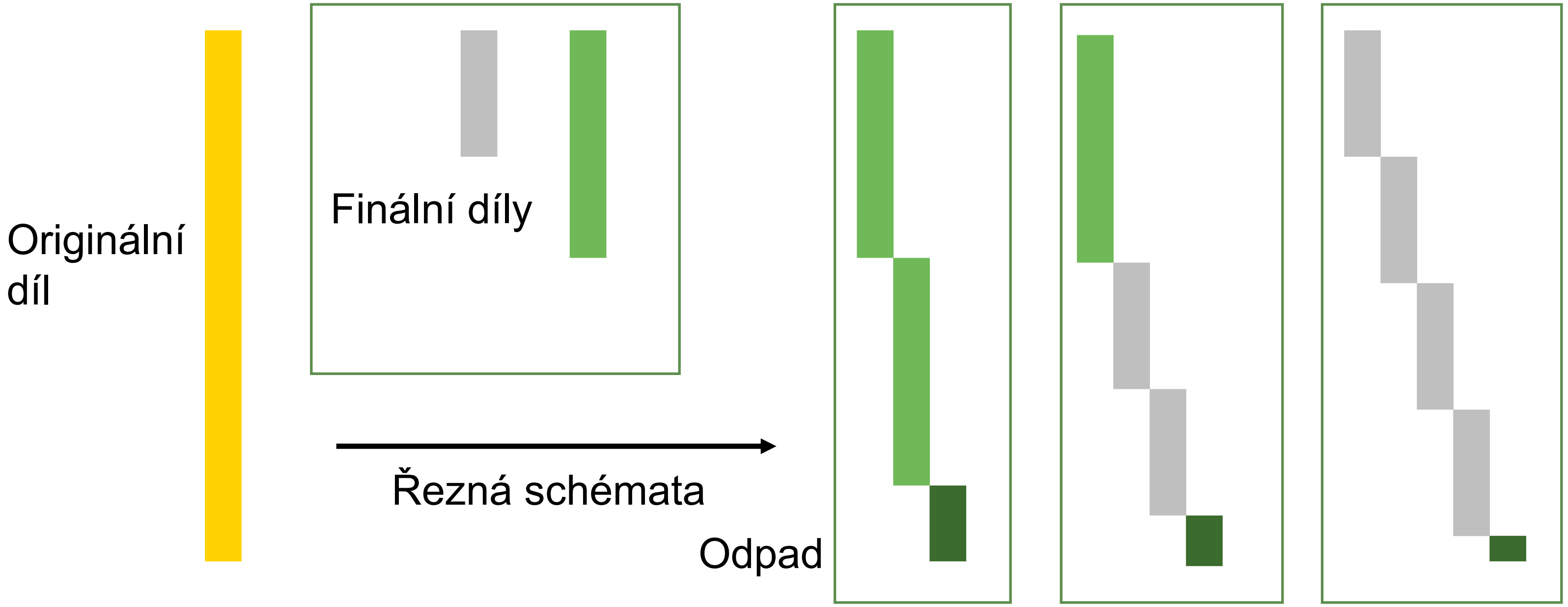
Řezná úloha

- **Vstupy – originální díly (rozměry)**
  - tyče, trubky (1D),
  - role papíru nebo textilu (1D or 2D),
  - dřevěné tyče nebo latě (1D),
  - prkna (1D nebo 2D),
  - ocelové pláty (2D),
  - krabice (3D) – 3D řezná úloha.
- **Výstupy – dokončené nebo rozpracované výrobky**
- **Cíle**
  - minimalizace odpadu,
  - minimalizace počtu původních dílů, použitých pro získání požadovaného množství nařezaných dílů,
  - maximalizace tržeb či zisku z prodeje výrobků sestavených z nařezaných dílů.

Úlohy výrobního plánování

Řezná úloha

- **Tabulka řezných schémat**
  - Obsahuje všechny možnosti rozřezaní originálních dílů.
  - Každé schéma odpovídá jedné proměnné představující počet originálních dílů, které byly rozřezány dle tohoto schématu.



Úlohy výrobního plánování

Řezná úloha

- **Příklad**
  - Firma vyrábí ploty z dřevěných latí. K výrobě plotu v konkrétní zakázce firma potřebuje 200 latí o délce 140 cm, 320 latí dlouhých 80 cm a 480 latí o délce 60 cm.
  - Ve skladu jsou k dispozici pouze standardní latě dlouhé 300 cm.
  - Je nutné splnit zakázku, a přitom použít minimální počet standardních latí.

Úlohy výrobního plánování

Řezná úloha

- **Tabulka řezných schémat**

Schéma	1	2	3	4	5	6	7	8
140 cm (ks)	2	1	1	1	0	0	0	0
80 cm (ks)	0	2	1	0	3	2	1	0
60 cm (ks)	0	0	1	2	1	2	3	5
Odpad (v cm)	20	0	20	40	0	20	40	0

Úlohy výrobního plánování

Škoda Auto Vysoká škola

Řezná úloha – formulace matematického modelu

- **Parametry**

  $m =$ počet typů kratších dílů

  $n =$ počet řezných schémat

  $b_i =$ požadovaný počet dílů i-tého typu $\left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$

  $a_{ij} =$ počet dílů i-tého typu získaných podle j-tého řezného schématu $\left(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\right)$

- **Proměnné**

  $x_j =$ počet kusů původního materiálu rozděleného podle j-tého řezného schématu

- **Účelová funkce**

$$z = \sum_{j=1}^{n} x_j \rightarrow \min \qquad \text{(minimalizace počtu rozřezaných kusů původního materiálu)}$$

- **Omezující podmínky**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \in \mathbf{Z}_+ \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

```
TITLE ReznaUloha;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="ReznaUloha.xlsx";
EXCELSHEETNAME="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("dil");
j:=EXCELRANGE("schema");

DATA
a[i,j]:=EXCELRANGE("rezy");
b[i]:=EXCELRANGE("pozadavek");

INTEGER VARIABLES
x[j] EXPORT TO EXCELRANGE("pocet");

MODEL
MIN z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(j:x[j]);

SUBJECT TO
dil[i]: sum(j:a[i,j]*x[j])=b[i];

END
```

Úlohy výrobního plánování

Škoda Auto Vysoká škola

Řezná úloha – řešení

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

    $x_1 = 20$ (počet 3 m latí rozřezaných dle 1. řezného schámatu)

    $x_2 = 160$ (počet 3 m latí rozřezaných dle 2. řezného schámatu)

    $x_8 = 96$ (počet 3 m latí rozřezaných dle 8. řezného schámatu)

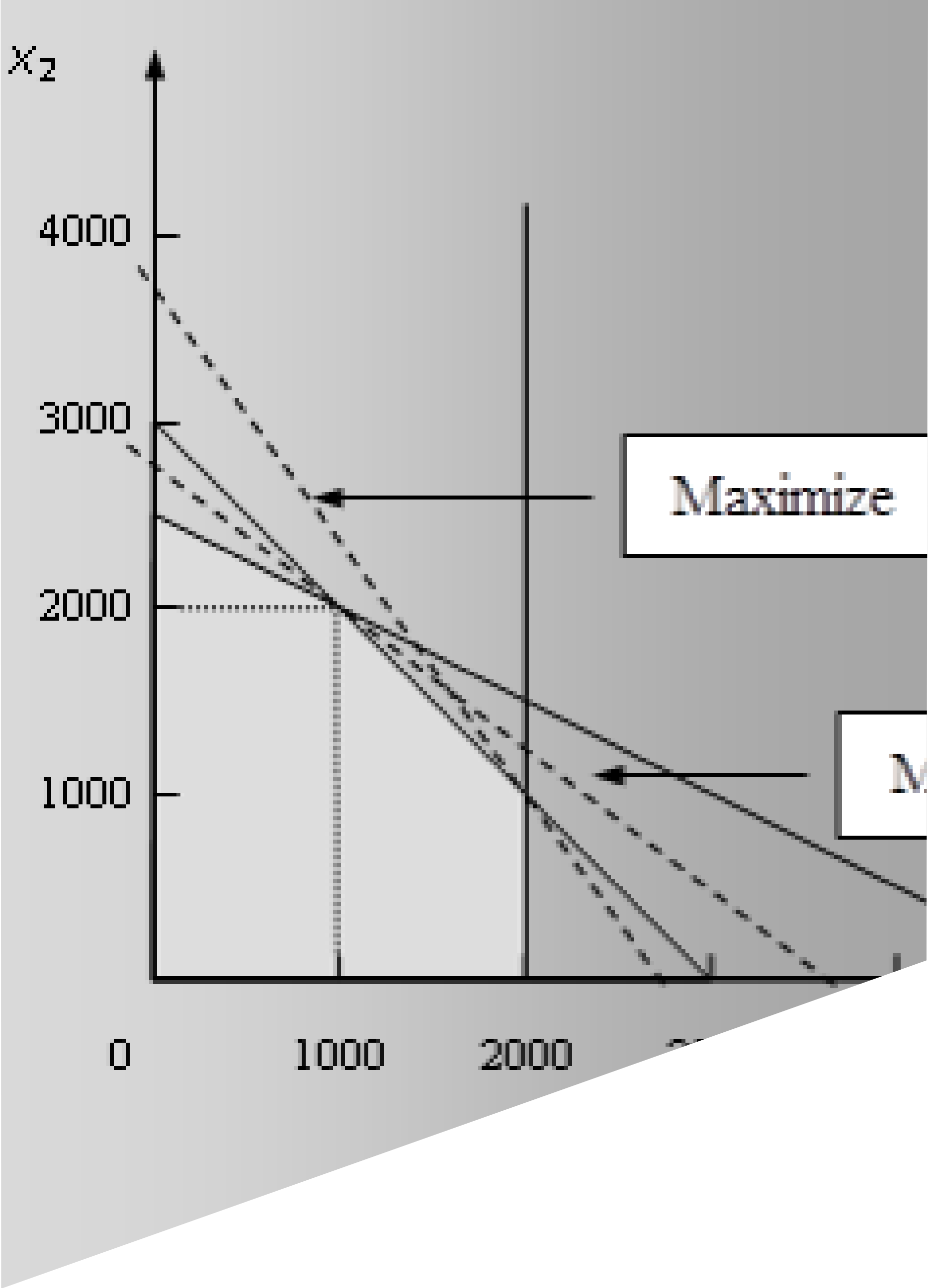
    $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 = 0$ (ostatní řezná chémata nebyla použita)
  - Hodnota účelové funkce

    $z_0 = 276$ (celkový počet rozřezaných 3 m latí)

```
SOLUTION RESULT

  Optimal integer solution found

    MIN z                  =        276.0000

DECISION VARIABLES

VARIABLE x[j] :

   j              Activity      Reduced Cost
  ----------------------------------------
   S1              20.0000           1.0000
   S2             160.0000           1.0000
   S8              96.0000           1.0000
  ----------------------------------------
```

3

Přiřazovací problém



Přiřazovací problém

Škoda Auto Vysoká škola

Lineární přiřazovací problém

- **Zadání úlohy**
  - Dvě množiny prvků.
  - Každému prvku z první množiny je přiřazen právě jeden prvek z druhé množiny.
  - Každému prvku z druhé množiny je přiřazen právě jeden prvek z první množiny.
  - Přiřazení každého páru je ohodnoceno.
  - Cílem je maximalizovat/minimalizovat celkové ohodnocení přiřazených prvků.
  - Předpoklad: počet prvků v obou množinách je stejný (vyrovnaný problém). V opačném případě je nutné upravit data nebo matematický model (nevyrovnaný problém).

Přiřazovací problém

Škoda Auto Vysoká škola

Lineární přiřazovací problém

- **Příklad**
  - Organizuje se štafetový závod pro pětičlenné týmy.
  - Každý člen týmu závodí v jedné disciplíně a vy chcete sestavit nejsilnější možný tým. V tabulce jsou pro každého z 8 kandidátů na místo ve štafetě uvedeny jeho nejlepší výkony v sezóně (v minutách).

Čas (min)	Běh	Plavání	Kolo	Brusle	Běžky
Mike	75	25	202	130	165
Jack	87	24	198	127	173
Peter	68	19	195	121	164
Sean	91	20	207	122	182
Paul	80	28	215	125	172
Simon	78	22	197	125	180
Tom	75	25	205	127	178
David	81	23	211	131	165

Přiřazovací problém

Škoda Auto Vysoká škola

Lineární přiřazovací problém – použití heuristické metody a řešení ve VBA for Excel

- **Přípustné řešení**
  - Proměnné

Čas (min)	Běh	Plavání	Kolo	Brusle	Běžky
Mike	75	25	202	130	165
Jack	87	24	198	127	173
Peter	68	19	195	121	164
Sean	91	20	207	122	182
Paul	80	28	215	125	172
Simon	78	22	197	125	180
Tom	75	25	205	127	178
David	81	23	211	131	165

  - Hodnota účelové funkce

$$z = 578 \qquad \text{(čas dokončení štafety)}$$

Přiřazovací problém

Škoda Auto Vysoká škola

Lineární přiřazovací problém – obecná formulace matematického modelu

- **Parametry**

$$c_{ij} = \text{ohodnocení dvojice } i \text{ a } j$$

- **Proměnné**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } i \leftrightarrow j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Přiřazovací problém

Škoda Auto Vysoká škola

Lineární přiřazovací problém – obecná formulace matematického modelu

- Vyrovnaný problém

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \in \mathbf{B} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}$$

- Nevyrovnaný problém $(m > n)$

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \in \mathbb{B} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}$$

nebo použitím $(m-n)$ fiktivních prvků.

```
TITLE Stafeta;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="Stafeta.xlsm";
EXCELSHEETNAME="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("sportovec");
j:=EXCELRANGE("disciplina");

DATA
c[i,j]:=EXCELRANGE("cas");

BINARY VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("stafeta");

MODEL
MIN z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(c*x);

SUBJECT TO
sportovec[i]:  sum(j:x[i,j])<=1;
disciplina[j]: sum(i:x[i,j])=1;

END
```

Přiřazovací problém

Škoda Auto Vysoká škola

Lineární přiřazovací problém – řešení

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

Čas (min)	Běh	Plavání	Kolo	Brusle	Běžky
Mike	75	25	202	130	165
Jack	87	24	198	127	173
Peter	68	19	195	121	164
Sean	91	20	207	122	182
Paul	80	28	215	125	172
Simon	78	22	197	125	180
Tom	75	25	205	127	178
David	81	23	211	131	165

```
SOLUTION RESULT

  Optimal integer solution found

    MIN z                 =        575.0000

DECISION VARIABLES

VARIABLE x[i,j] :

   i       j                  Activity      Reduced Cost
  --------------------------------------------------------
   Jack    Kolo                 1.0000          198.0000
   Peter   Beh                  1.0000           68.0000
   Sean    Brusle               1.0000          122.0000
   Simon   Plavani              1.0000           22.0000
   David   Bezky                1.0000          165.0000
  --------------------------------------------------------
```

  - Hodnota účelové funkce

$z_0 = 575$ (minimální čas dokončení štafety)

Přiřazovací problém

Úzkoprofilový přiřazovací problém

- **Zadání úlohy**
  - Je dáno n úkolů a n paralelních strojů k jejich realizaci.
  - Koeficient c_{ij} představuje dobu nutnou pro dokončení úkolu i strojem j. Cílem je minimalizovat dobu, za kterou budou úkoly dokončeny (všechny stroje začnou na úkolech pracovat současně).

Přiřazovací problém

Škoda Auto Vysoká škola

Úzkoprofilový přiřazovací problém

- **Příklad**
  - Projekt je tvořen 5 nezávislými úkoly. Ve firmě je 5 oddělení, která jsou schopna zvládnout jednotlivé části.
  - Na základě historických údajů jsou vypočítány průměrné doby (ve dnech), během nichž jsou oddělení schopna dokončit podobné úkoly (viz tabulka).
  - Označení N.A. znamená, že oddělení nikdy v minulosti podobný úkol neřešilo. Společnost chce dokončit celý projekt co nejdříve.

Čas (dny)	Úkol 1	Úkol 2	Úkol 3	Úkol 4	Úkol 5
Odd 1	25	15	N.A.	17	25
Odd 2	22	N.A.	22	20	22
Odd 3	20	18	25	16	23
Odd 4	N.A.	20	30	21	28
Odd 5	27	19	27	18	N.A.

- Hodnoty N.A. nahradíme vysokými prohibitivními konstantami, např. 1000.

Přiřazovací problém

Škoda Auto Vysoká škola

Úzkoprofilový přiřazovací problém – formulace matematického modelu

- **Proměnné**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže úkol } i \text{ je přiřazen oddělení } j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$T = \text{ čas na dokončení posledního úkolu}$$

- **Model**

$$T \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$c_{ij} x_{ij} \leq T \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \in \mathbf{B} \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$T \in \mathbf{R}_{+}$$

```
TITLE UzkoprofilovyPP;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="UzkoprofilovyPP.xlsx";
EXCELSHEETNAME="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("oddeleni");
j:=EXCELRANGE("ukol");

DATA
c[i,j]:=EXCELRANGE("cas");

BINARY VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("prirazeni");

VARIABLES
T EXPORT TO EXCELRANGE("celkem");

MODEL

MIN z=T;

SUBJECT TO
profil[i,j]:   c[i,j]*x[i,j]<=T;
oddeleni[i]:   sum(j:x[i,j])=1;
ukol[j]:       sum(i:x[i,j])=1;


END
```

Přiřazovací problém

Škoda Auto Vysoká škola

Úzkoprofilový přiřazovací problém – řešení

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

Čas (dny)	Úkol 1	Úkol 2	Úkol 3	Úkol 4	Úkol 5
Odd 1	25	15	1000	17	25
Odd 2	22	1000	22	20	22
Odd 3	20	18	25	16	23
Odd 4	1000	20	30	21	28
Odd 5	27	19	27	18	1000

  - Hodnota účelové funkce

$z_0 = 25$ (minimální čas dokončení poslední části)

```
SOLUTION RESULT

  Optimal integer solution found

    MIN z                =          25.0000

DECISION VARIABLES

VARIABLE x[i,j] :

   i     j                Activity      Reduced Cost
  ------------------------------------------------
   Odd1  Ukol5             1.0000           25.0000
   Odd2  Ukol3             1.0000            0.0000
   Odd3  Ukol1             1.0000            0.0000
   Odd4  Ukol4             1.0000            0.0000
   Odd5  Ukol2             1.0000            0.0000
  ------------------------------------------------
```

Přiřazovací problém

Úloha perfektního párování

- **Příklad**
  - Deset studentů jede na školní výlet. Protože je nutné je rozdělit do dvoulůžkových pokojů, byli vyzváni, aby vyjádřili své preference ohledně budoucího spolubydlícího (viz tabulka, 0 = min, 10 = max).
  - Pro $i < j$ vyjadřuje student i hodnotou p_{ij} svoji preferenci bydlet v pokoji se studentem j, pro $i > j$ vyjadřuje student j hodnotou p_{ij} svoji preferenci bydlet v pokoji se studentem i.
  - Rozdělte studenty do pokojů tak, aby třída jako celek byla maximálně spokojená.

Pref	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	7	6	2	4	7	4	1	8	3
2	1	0	3	1	10	5	2	9	4	2
3	10	1	0	5	6	1	8	2	7	4
4	1	8	4	0	10	7	5	4	2	7
5	8	7	3	5	0	2	1	5	2	9
6	2	2	3	7	8	0	8	2	1	5
7	1	7	6	1	7	7	0	8	1	5
8	6	8	1	1	10	8	1	0	4	7
9	4	1	2	2	8	1	7	5	0	2
10	1	5	4	3	9	7	1	4	6	0

Přiřazovací problém

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha perfektního párování – formulace matematického modelu

- **Parametry**

$$p_{ij} = \begin{cases} \text{preference studenta } j \text{ studentem } i \ (i < j) \\ \text{preference studenta } i \text{ studentem } j \ (i > j) \end{cases}$$

$$c_{ij} = \text{index spokojenosti dvojice studentů } i \text{ a } j \ (i < j)$$

- **Proměnné**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže studenti } i \text{ a } j \text{ jsou spolubydlící} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad i < j$$

- **Model**

$$c_{ij} = p_{ij} + p_{ji} \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1; \ \ j = i+1, i+2, \ldots, n,$$

$$z = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max,$$

$$\sum_{j<i} x_{ji} + \sum_{j>i} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \in \mathbf{B} \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1; \ \ j = i+1, i+2, \ldots, n.$$

```
TITLE PerfektniParovani;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="PerfektniParovani.xlsx";
EXCELSHEETNAME="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("student");
j:=i;
dvojice[i,j] WHERE i<j;

DATA
p[i,j]:=EXCELRANGE("preference");
c[i,j in dvojice]:=p[i,j]+p[i:=j,j:=i];

BINARY VARIABLES
x[i,j in dvojice];

MODEL
MAX z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(c*x);

SUBJECT TO
student[i]: sum(j<i:x[i:=j,j:=i])+sum(j>i:x[i,j])=1;

END
```

Přiřazovací problém

Úloha perfektního párování – řešení

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

Pref	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	8	16	3	12	9	5	7	12	4
2	-	-	4	4	9	17	7	17	5	7
3	-	-	-	9	9	4	14	3	9	8
4	-	-	-	-	15	14	3	9	4	10
5	-	-	-	-	-	10	8	15	10	18
6	-	-	-	-	-	-	15	10	2	12
7	-	-	-	-	-	-	-	9	8	6
8	-	-	-	-	-	-	-	-	9	11
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

```
SOLUTION RESULT

 Optimal integer solution found

   MAX z                    =          75.0000

DECISION VARIABLES

VARIABLE x[i,j IN dvojice] :

   i   j              Activity        Reduced Cost
 ------------------------------------------------
   1   9               1.0000           12.0000
   2   8               1.0000           17.0000
   3   7               1.0000           14.0000
   4   6               1.0000           14.0000
   5  10               1.0000           18.0000
 ------------------------------------------------
```

  - Hodnota účelové funkce

$z_0 = 75$ (maximální možná celková spokojenost)

Přiřazovací problém

Úloha batohu

- **Zadání úlohy**
  - Je dán rozpočet b pro investice do n uvažovaných projektů, kde a_j je hodnota nákladů na projekt j a c_j je jeho očekávaný výnos.
  - Cílem je vybrat takový soubor projektů, který maximalizuje celkový očekávaný výnos a nepřekročí daný rozpočet.
- **Proměnné**

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{je-li projekt } j \text{ vybrán} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

- **Obecný model**

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b,$$

$$x_j \in \mathbf{B} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Přiřazovací problém

Úloha batohu

- **Příklad**
  - Společnost zvažuje investici do 5 projektů charakterizovaných náklady a výnosy.
  - Rozpočet 50 000 € má být použitý tak, aby investice maximalizovala celkový výnos.

Projekty	P1	P2	P3	P4	P5
Náklady	12 000	10 000	15 000	18 000	16 000
Výnosy	20 000	18 000	22 000	26 000	21 000

Přiřazovací problém

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha batohu – formulace matematického modelu

- **Proměnné**

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{je-li projekt } j \text{ vybrán} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

- **Model**

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b,$$

$$x_j \in \mathbf{B} \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

```
TITLE UlohaBatohu;

INDEX
j:=1..5;

DATA
a[j]:=1000 (12,10,15,18,16);
c[j]:=1000 (20,18,22,26,21);
b:=50000;

BINARY VARIABLES
x[j];

MODEL
MAX z=sum(c*x);

SUBJECT TO
naklady: sum(a*x)<=b;

END
```

```
TITLE UlohaBatohu;

OPTIONS
ExcelWorkBook="6. Úloha batohu.xlsx";
ExceSheetName="MPL";

INDEX
j:=EXCELRANGE("projekt");

DATA
a[j]:=EXCELRANGE("naklady");
c[j]:=EXCELRANGE("vynosy");
b:=EXCELRANGE("budget");

BINARY VARIABLES
x[j] EXPORT TO EXCELRANGE("vybrany");

MODEL
MAX z EXPORT TO EXCELRANGE("vynos") =sum(c*x);

SUBJECT TO
budget:     sum(a*x) <= b;

END
```

Přiřazovací problém

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha batohu – řešení

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

    $x_3 = x_4 = x_5 = 1$ (investujeme do 3., 4. a 5. projektu)

    $x_1 = x_2 = 0$ (do 1. a 2. projektu investovat nebudeme)
  - Hodnota účelové funkce

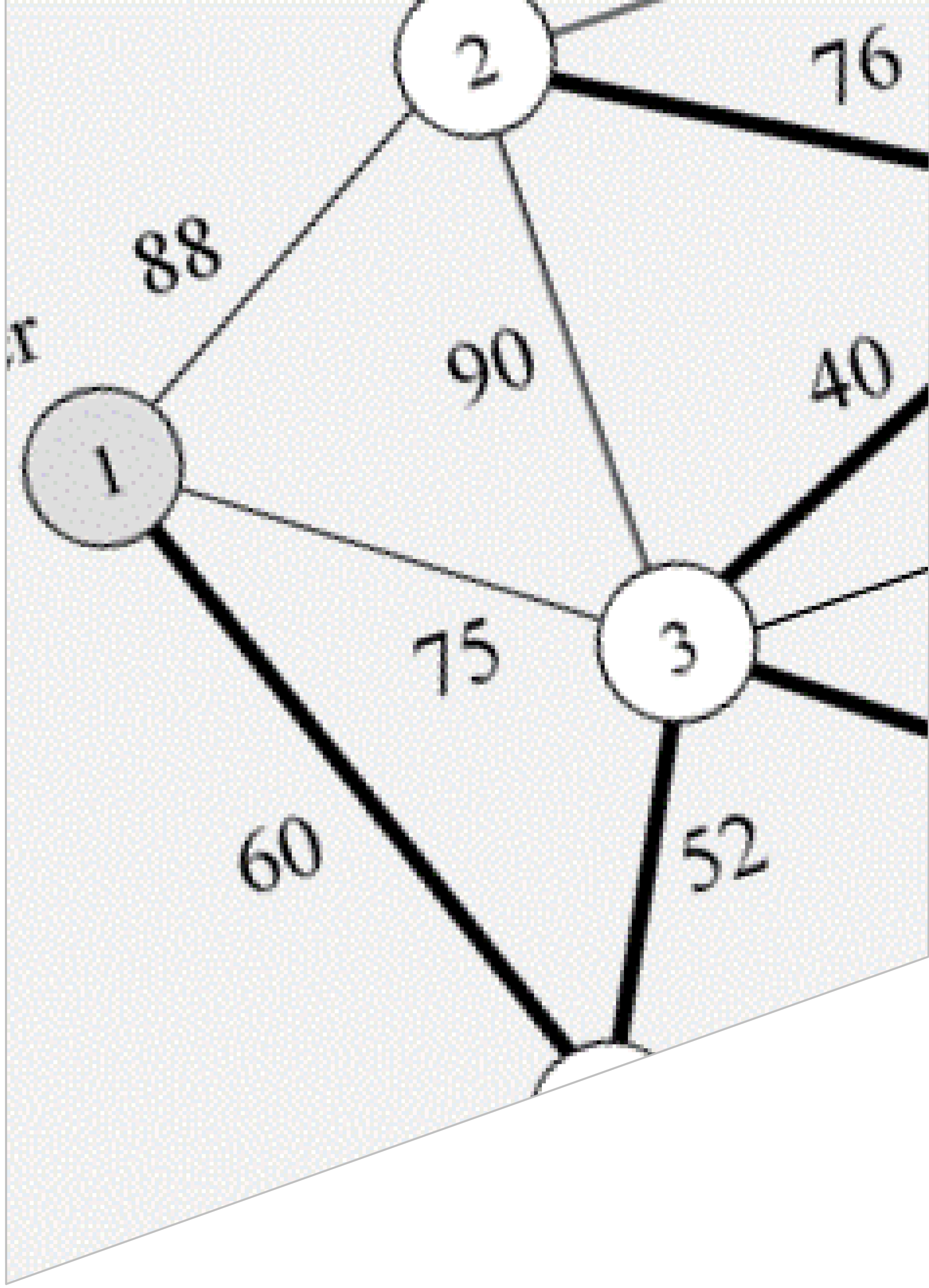
    $z_0 = 69000$ (maximální možný celkový výnos z investice)
  - Přídatné proměnné

    $x_6 = 1000$ (nevyužitá část budgetu)

```
SOLUTION RESULT

Optimal integer solution found


MAX z                    =      69000.0000

DECISION VARIABLES

VARIABLE x[j] :

   j            Activity      Reduced Cost
----------------------------------------
   1              0.0000        20000.0000
   2              0.0000        18000.0000
   3              1.0000        22000.0000
   4              1.0000        26000.0000
   5              1.0000        21000.0000
----------------------------------------

CONSTRAINTS


PLAIN CONSTRAINTS

Constraint Name             Slack       Shadow Price
-----------------------------------------------------
   naklady                1000.0000             0.0000
-----------------------------------------------------

END
```

4

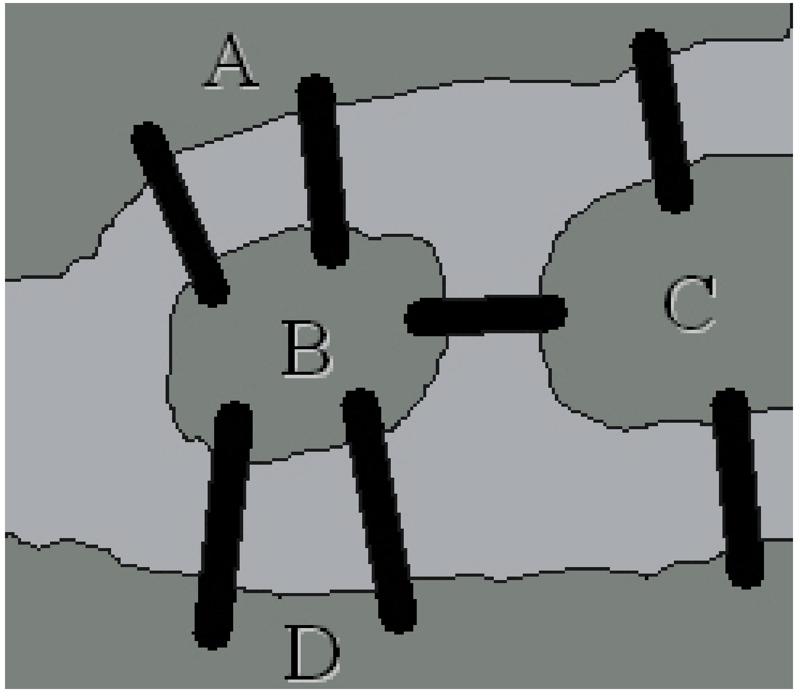
Úlohy na grafech

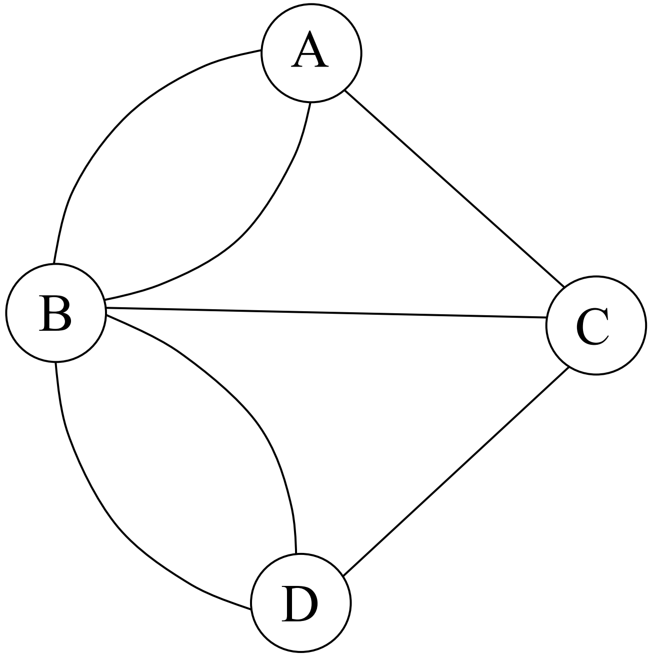


Úlohy na grafech

Úvod

- **Sedm königsbergských mostů**





Úlohy na grafech

Základní pojmy

- Graf je množina $G = \{V, E\}$, kde V je množina uzlů (vrcholů) a E množina hran.
- Neorientovaná hrana je množina dvou uzlů $\{i, j\}$.
- Orientovaná hrana je uspořádaná dvojice uzlů (i, j).
- V neorientovaném grafu jsou všechny hrany neorientované.
- V orientovaném grafu (digrafu) jsou všechny hrany orientované.
- Smíšený graf obsahuje neorientované i orientované hrany.
- Dva uzly spojené hranou se nazývají sousední.
- Dvě hrany se společným uzlem se nazývají sousední.
- Hrana a vrchol obsažený v této hraně se nazývají incidentní.
- Stupeň uzlu (v neorientovaném grafu) je počet hran s ním incidentních.

Úlohy na grafech

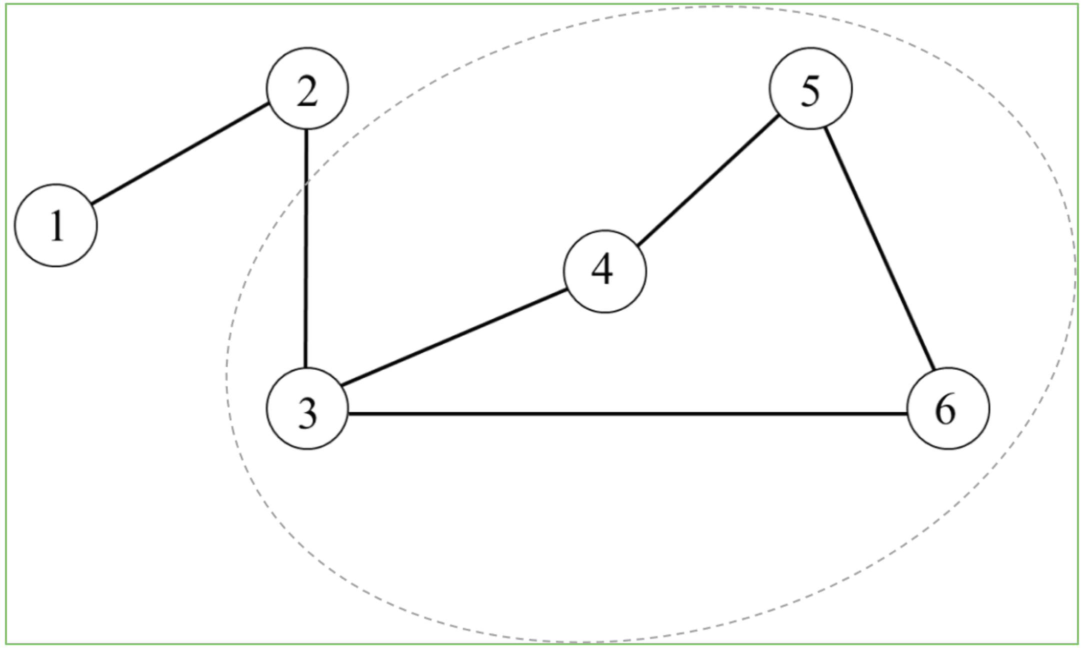
Základní pojmy

- Vstupní polostupeň uzlu (v orientovaném grafu) je počet incidentních hran, v nichž je tento uzel koncovým uzlem.
- Výstupní polostupeň uzlu (v orientovaném grafu) je počet incidentních hran, v níž je tento uzel počátečním uzlem.
- Sled z uzlu i do uzlu j je posloupnost uzlů a hran, která začíná v uzlu i a končí v uzlu j (uzly a hrany se mohou opakovat).
- Tah je sled, v němž se neopakují žádné hrany.
- Cesta je tah, v němž se neopakují žádné uzly.
- Cyklus je uzavřený sled (začíná a končí ve stejném uzlu).
- V orientované cestě (v orientovaném grafu) je respektována orientace všech hran.
- V neorientované cestě (v orientovaném grafu) nemusí být orientace hran respektována.

Úlohy na grafech

Základní pojmy

- Cyklus (okruh)



Úlohy na grafech

Škoda Auto Vysoká škola

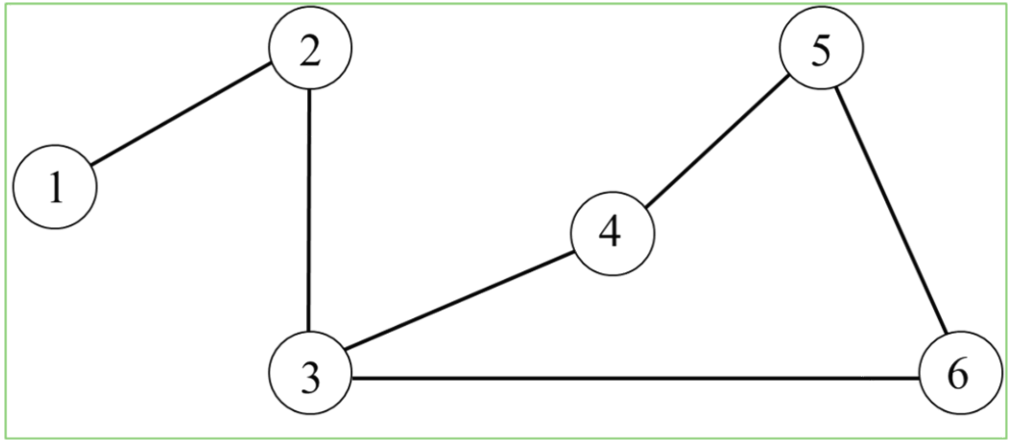
Základní pojmy

- Neorientovaný graf je souvislý, jestliže mezi každými 2 uzly existuje cesta.
- Orientovaný graf je souvislý, jestliže mezi každými 2 uzly existuje orientovaná nebo neorientovaná cesta.
- Orientovaný graf je silně souvislý, jestliže mezi každými 2 uzly existuje orientovaná cesta.
- Graf je úplný, jestliže mezi každými 2 uzly existuje hrana.
- Strom je souvislý neorientovaný graf, v němž neexistuje cyklus.
- Podgraf grafu $G = \{V, E\}$ je graf $G' = \{V', E'\}$, kde $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$.
- Kostra grafu G je podgraf G', kde $V' = V$, a který je stromem.
- V ohodnoceném grafu jsou uzlům a/nebo hranám přiřazena čísla.
- Minimální kostra grafu je kostra s minimálním součtem ohodnocení hran.

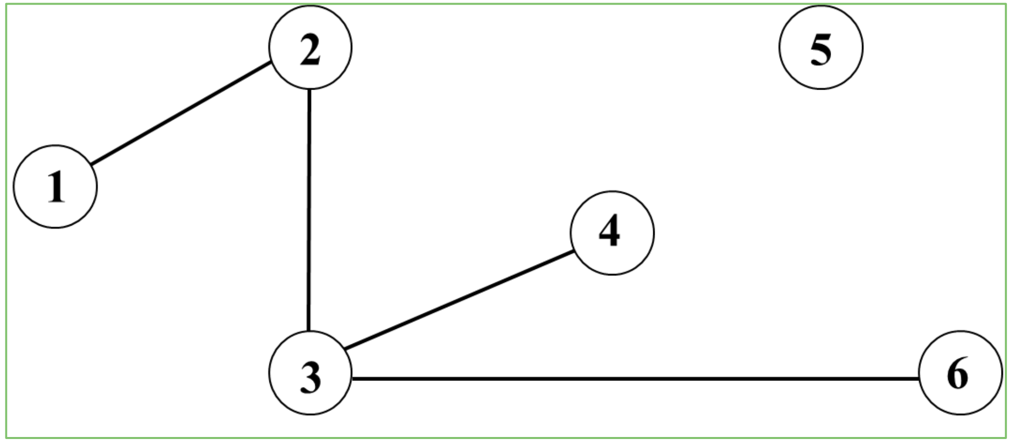
Úlohy na grafech

Základní pojmy

- Souvislý graf



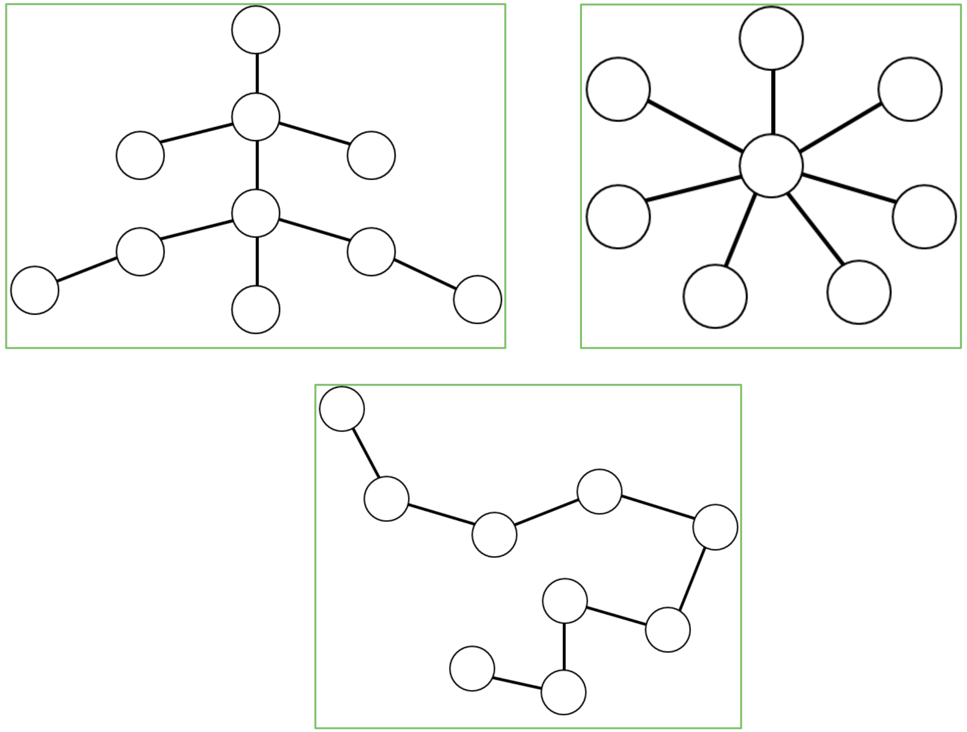
- Nesouvislý graf



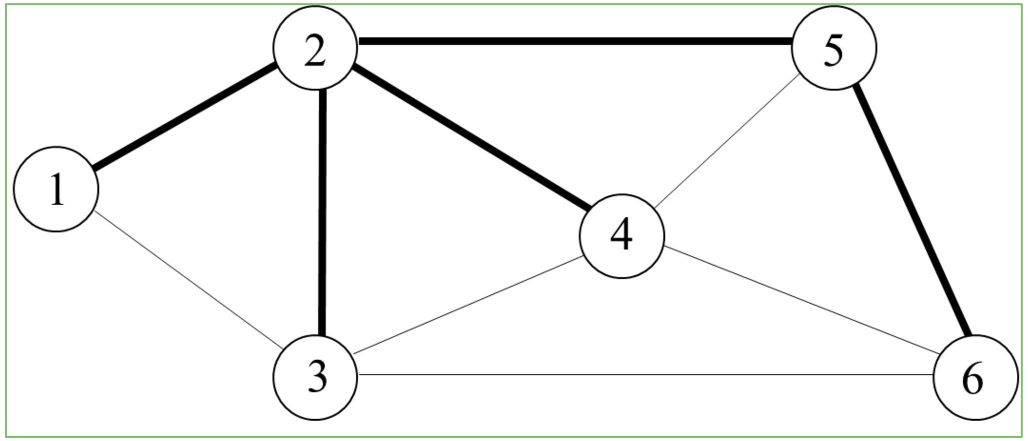
Úlohy na grafech

Základní pojmy

- Strom



- Kostra grafu



Úlohy na grafech

Základní pojmy

- Síťový graf je souvislý, orientovaný, ohodnocený graf s jedním vstupem a jedním výstupem.
- Hamiltonův cyklus v grafu je cyklus, který obsahuje každý uzel grafu právě jednou.
- Eulerův cyklus v grafu obsahuje každou jeho hranu právě jednou.
- Eulerův tah v grafu je tah, který obsahuje každou jeho hranu.
- Eulerovský graf je graf, v němž existuje Eulerův cyklus

Úlohy na grafech

Úloha hledání maximálního toku

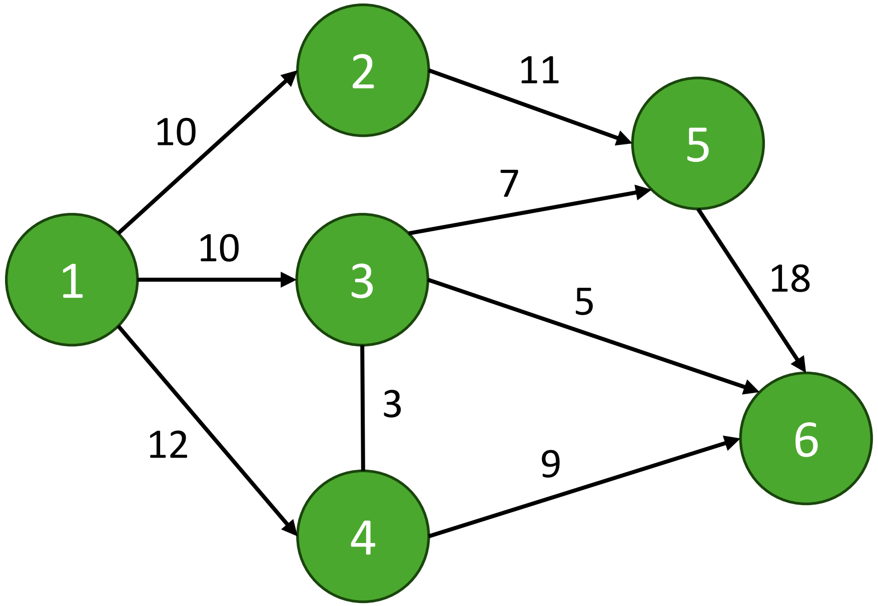
- **Zadání úlohy**
  - $G = \{V, E\}$ je digraf, v němž je pro každou hranu (i, j) definována její kapacita k_{ij}.
  - Cílem je nalézt maximální hodnotu toku mezi zdrojem s a místem určení (stokem) d.

Úlohy na grafech

Úloha hledání maximálního toku

- **Příklad**
  - Najděte maximální hodnotu toku z uzlu 1 do uzlu 6 v grafu daném následující tabulkou.

Hrana	Kapacita	Hrana	Kapacita
(1,2)	10	(3,5)	7
(1,3)	10	(3,6)	5
(1,4)	12	(4,3)	3
(2,5)	11	(4,6)	9
(3,4)	3	(5,6)	18



- **Transformace grafu**
  - Graf převedeme na úplný orientovaný graf.
  - Kapacity pro neexistující hrany jsou nulové.

Úlohy na grafech

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha hledání maximálního toku – formulace matematického modelu

- **Proměnné**

  $x_{ij} =$ hodnota toku z uzlu i do uzlu j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$

  $F =$ hodnota celkového toku

- **Model**

$$F \to \max ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = \begin{cases} F & i = s \\ -F & i = d, \\ 0 & i = 1, 2, \ldots, n, i \notin \{s, d\} \end{cases}$$

$$x_{ij} \le k_{ij} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \in \mathbf{R}_+ \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$F \in \mathbf{R}_+ \ .$$

```
TITLE MaximalniTok;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="MaximalniTok.xlsx";
EXCELSHEETNAME="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("uzel");
j:=i;
s[i]:=EXCELRANGE("s");
d[i]:=EXCELRANGE("d");
prubezne[i]:=i-s-d;

DATA
k[i,j]:=EXCELRANGE("kapacita");

VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("tok");
F EXPORT TO EXCELRANGE("celkem");

MODEL
MAX F;

SUBJECT TO
zdroj[i in s]:                sum(j:x[i,j])-sum(j:x[i:=j,j:=i])=F;
stok[i in d]:                 sum(j:x[i,j])-sum(j:x[i:=j,j:=i])=-F;
prubezny[i in prubezne]:      sum(j:x[i,j])-sum(j:x[i:=j,j:=i])=0;

BOUNDS
x<=k;

END
```

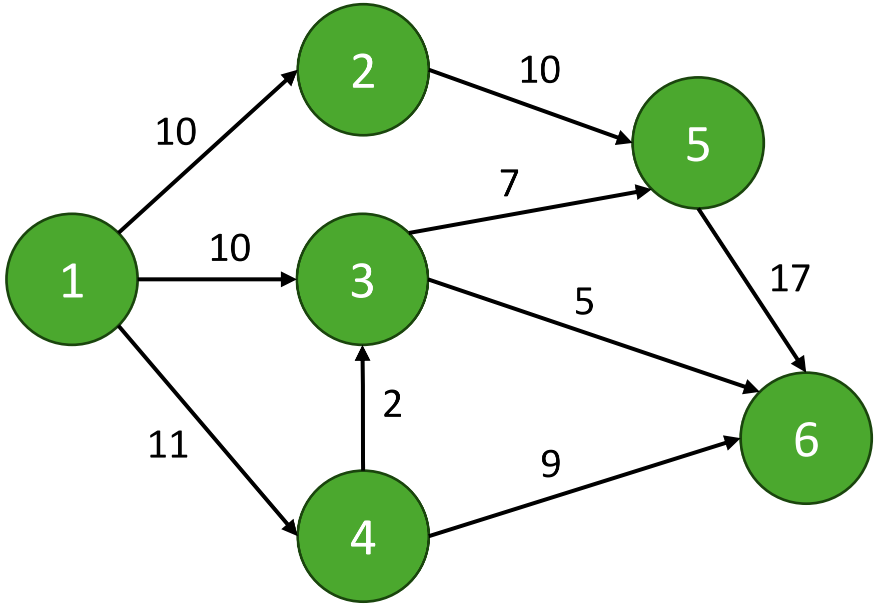
Úlohy na grafech

Úloha hledání maximálního toku – řešení

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

    viz obrázek
  - Hodnota účelové funkce

    $z_0 = 31$ (maximální možný tok)



SOLUTION RESULT

Optimal solution found

MAX F = 31.0000

DECISION VARIABLES

VARIABLE x[i,j] :

i	j	Activity	Reduced Cost
1	2	10.0000	1.0000
1	3	10.0000	0.0000
1	4	11.0000	0.0000
2	5	10.0000	0.0000
3	4	1.0000	0.0000
3	5	7.0000	1.0000
3	6	5.0000	1.0000
4	3	3.0000	0.0000
4	6	9.0000	1.0000
5	6	17.0000	0.0000

Úlohy na grafech

Úloha hledání maximálního toku

- **Alternativní zadání úlohy**
  - V úplném orientovaném grafu nastavíme kapacitu $k_{ds} = M$ (vysoká konstanta).
- **Proměnné**

  $x_{ij} =$ hodnota toku z uzlu i do uzlu j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$
- **Obecný model**

$$x_{ds} \to \max\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_{ij} \le k_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_{ij} \in \mathbf{R}_{+} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

9		1	2	3	4	5	6	Z uzlu
10	1	0	10	10	11	0	0	31
11	2	0	0	0	0	10	0	10
12	3	0	0	0	0	7	5	12
13	4	0	0	2	0	0	9	11
14	5	0	0	0	0	0	17	17
15	6	31	0	0	0	0	0	31
16	Do uzlu	31	10	12	11	17	31	
17								
18	Celkem	31						
19								

Úlohy na grafech

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha hledání toku s minimálními náklady

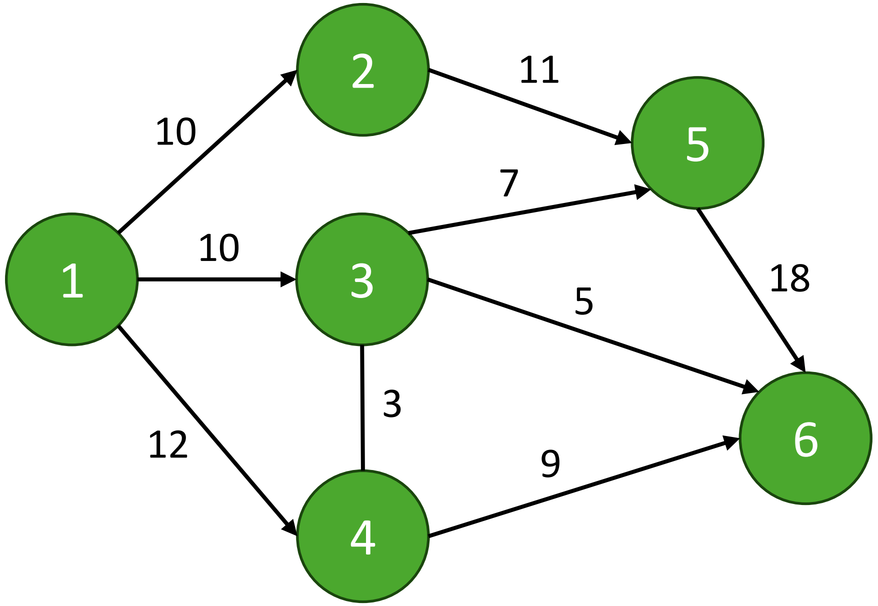
- **Zadání úlohy**
  - $G = \{V, E\}$ je digraf, v němž je pro každou hranu (i, j) definována její kapacita k_{ij}. a jednotkové náklady c_{ij}.
  - Cílem je splnit požadovanou hodnotu celkového toku F_0 (ze zdroje s do stoku d) s minimálními celkovými náklady.
- **Transformace grafu**
  - Graf převedeme na úplný orientovaný graf.
  - Kapacity pro neexistující hrany jsou nulové.

Úlohy na grafech

Úloha hledání toku s minimálními náklady

- **Příklad**
  - Najděte tok (z 1 do 6) o velikosti 25 s minimálními celkovými náklady. V tabulce je pro každou hranu dána její kapacita a jednotkové náklady spojené s tokem.

Hrana	Kapacita	Náklady	Hrana	Kapacita	Náklady
(1,2)	10	5	(3,5)	7	6
(1,3)	10	10	(3,6)	5	9
(1,4)	12	20	(4,3)	3	12
(2,5)	11	11	(4,6)	9	17
(3,4)	3	12	(5,6)	18	8



Úlohy na grafech

Úloha hledání toku s minimálními náklady – formulace matematického modelu

- **Proměnné**

  $x_{ij} =$ hodnota toku z uzlu i do uzlu j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$

- **Model**

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = \begin{cases} F_0 & i = s \\ -F_0 & i = d, \\ 0 & i = 1, 2, \ldots, n, i \notin \{s, d\} \end{cases}$$

$$x_{ij} \le k_{ij} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \in \mathbf{R}_+ \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

```
TITLE TokMinimalnimiNaklady;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="TokMinimalniNaklady.xlsx";
EXCELSHEETNAME="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("uzel");
j:=i;
s[i]:=EXCELRANGE("s");
d[i]:=EXCELRANGE("d");
prubezne[i]:=i-s-d;

DATA
k[i,j]:=EXCELRANGE("kapacita");
c[i,j]:=EXCELRANGE("naklady");
F0:=EXCELRANGE("pozadavek");

VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("tok");

MODEL
MIN z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(c*x) ;

SUBJECT TO
zdroj[i in s]:              sum(j:x[i,j])-sum(j:x[i:=j,j:=i])=F0;
stok[i in d]:               sum(j:x[i,j])-sum(j:x[i:=j,j:=i])=-F0;
prubezny[i in prubezne]:    sum(j:x[i,j])-sum(j:x[i:=j,j:=i])=0;

BOUNDS
x<=k;

END
```

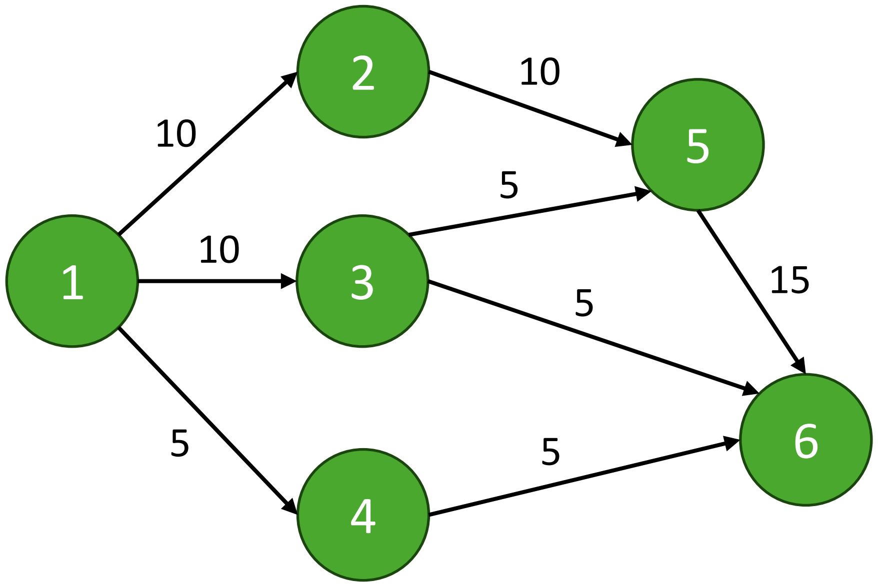
Úlohy na grafech

Úloha hledání toku s minimálními náklady – řešení

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

    viz obrázek
  - Hodnota účelové funkce

    $z_0 = 640$ (minimální celkové náklady)



SOLUTION RESULT

Optimal solution found

MIN z = 640.0000

DECISION VARIABLES

VARIABLE x[i,j] :

i	j	Activity	Reduced Cost
1	2	10.0000	-13.0000
1	3	10.0000	-13.0000
1	4	5.0000	0.0000
2	5	10.0000	0.0000
3	5	5.0000	0.0000
3	6	5.0000	-5.0000
4	6	5.0000	0.0000
5	6	15.0000	0.0000

Úlohy na grafech

Škoda Auto Vysoká škola

Přepravní toková úloha (Transshipment Problem)

- **Zadání úlohy**
  - $G = \{V, E\}$ je digraf se třemi množinami uzlů: množina zdrojů V_s, množina cílových uzlů V_d a množina průběžných uzlů V_t.
  - Pro každou hranu (i, j) definována její kapacita k_{ij}. a jednotkové náklady c_{ij}.
  - Poptávka ve všech cílových uzlech musí být uspokojena, aniž by došlo v některém zdroji k překročení jeho nabídky.
  - Cílem je minimalizovat celkové náklady (předpokládejme, že velikost celkové poptávky je rovna velikosti celkové nabídky).

$a_i > 0$ velikost nabídky homogeního produktu ve zdroji $i \in V_s$

$a_i < 0$ velikost poptávky homogeního produktu v cílovém uzlu $i \in V_d$

$a_i = 0$ pro průběžný uzel $i \in V_t$

- **Předpoklady**

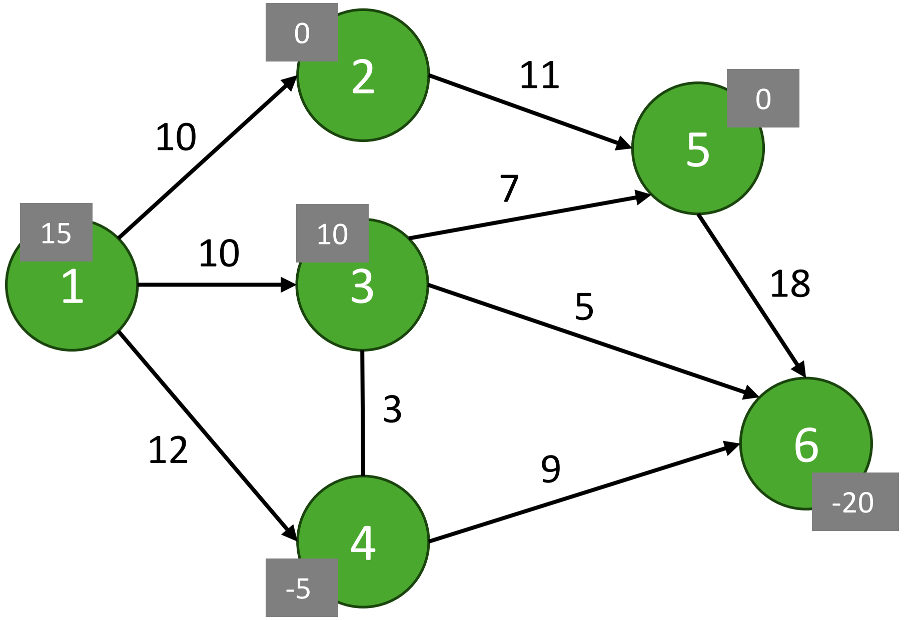
$$V = V_s \cup V_d \cup V_t \quad \text{a} \quad V_s \cap V_d \cap V_t = \varnothing, \qquad \sum_{i \in V_s} a_i + \sum_{i \in V_d} a_i = 0.$$

Úlohy na grafech

Přepravní toková úloha (Transshipment Problem)

- **Příklad**
  - Firma potřebuje přepravit prázdné kontejnery ze zdrojových míst do míst určení.
  - V grafu představují uzly 1 a 3 zdrojová místa nabízející 15 a 10 kontejnerů, uzly 4 a 6 jsou místa určení požadující 5 a 20 kontejnerů.
  - V tabulce je pro každou hranu dána její kapacita a náklady spojené s přepravou jednoho kontejneru.
  - Cílem je minimalizovat celkové přepravní náklady.

Hrana	Kapacita	Náklady	Hrana	Kapacita	Náklady
(1,2)	10	5	(3,5)	7	6
(1,3)	10	10	(3,6)	5	9
(1,4)	12	20	(4,3)	3	12
(2,5)	11	11	(4,6)	9	17
(3,4)	3	12	(5,6)	18	8



Úlohy na grafech

Přepravní toková úloha (Transshipment Problem) – formulace matematického modelu

- **Transformace grafu**
  - Graf převedeme na úplný orientovaný graf.
  - Kapacity pro neexistující hrany jsou nulové.
- **Proměnné**

  $x_{ij} =$ hodnota transportu z uzlu i do uzlu j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$
- **Model**

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \le k_{ij} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \in \mathbf{R}_+ \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

```
TITLE Transshipment;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="Transshipment.xlsx";
EXCELSHEETNAME="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("uzel");
j:=i;

DATA
k[i,j]:=EXCELRANGE("kapacita");
c[i,j]:=EXCELRANGE("naklady");
a[i]:=EXCELRANGE("kontejnery");

INTEGER VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("tok");

MODEL
MIN z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(c*x) ;

SUBJECT TO
uzel[i]: sum(j:x[i,j])-sum(j:x[i:=j,j:=i])=a[i];

BOUNDS
x<=k;

END
```

Úlohy na grafech

Škoda Auto Vysoká škola

Přepravní toková úloha (Transshipment Problem) – řešení

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

    viz obrázek
  - Hodnota účelové funkce

    $z_0 = 455$ (minimální celkové náklady)

```
SOLUTION RESULT

  Optimal integer solution found

    MIN z                  =          455.0000

DECISION VARIABLES

VARIABLE x[i,j] :

    i  j              Activity     Reduced Cost
  ------------------------------------------
    1  2                8.0000           5.0000
    1  3                2.0000          10.0000
    1  4                5.0000          20.0000
    2  5                8.0000          11.0000
    3  5                7.0000           6.0000
    3  6                5.0000           9.0000
    5  6               15.0000           8.0000
  ------------------------------------------
```

Úlohy na grafech

Minimální kostra grafu

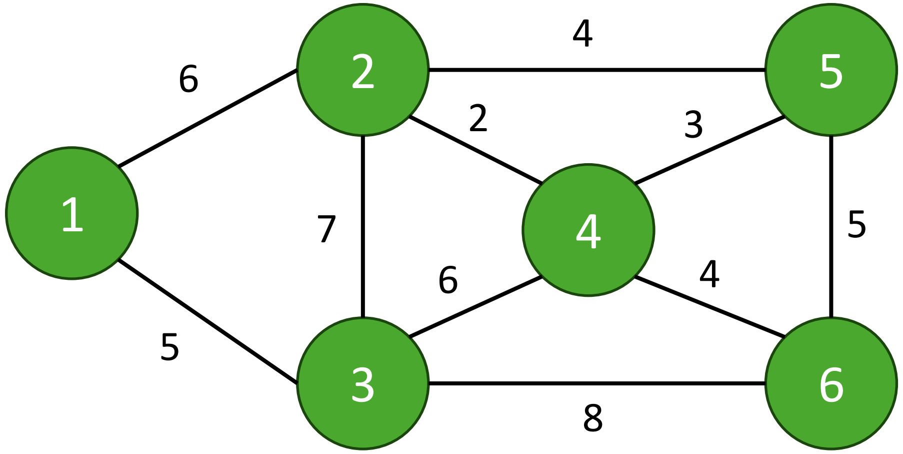
- **Zadání úlohy**
  - $G = \{V, E\}$ je neorientovaný graf, v němž jsou pro každou hranu $\{i, j\}$ definovány náklady c_{ij}.
  - Cílem je najít kostru grafu G s minimálními celkovými náklady odpovídajícími součtu nákladů vybraných hran.
- **Úprava grafu**
  - Množina neorientovaných hran E je převedena na množinu orientovaných hran A takto:
    - Každá hrana $\{i, j\} \in E$ je nahrazena dvojicí orientovaných hran $(i, j) \in A$ a $(j, i) \in A$, $c_{ij} = c_{ji}$.

Úlohy na grafech

Minimální kostra grafu

- **Příklad**
  - Společnost má v městském parku instalovat 6 elektronických informačních tabulí, které budou vzájemně propojeny kabelem vedoucím pod chodníky.
  - V tabulce jsou dány vzdálenosti mezi tabulemi (v desítkách metrů).
  - Nevede-li mezi tabulemi chodník, je v tabulce uvedena prohibitivní sazba 100.
  - Cílem je minimalizovat náklady jak na výkopové a stavební práce, tak na samotný kabel.

Tabule	1	2	3	4	5	6
1	0	6	5	100	100	100
2	6	0	7	2	4	100
3	5	7	0	6	100	8
4	100	2	6	0	3	4
5	100	4	100	3	0	5
6	100	100	8	4	5	0



Úlohy na grafech

Škoda Auto Vysoká škola

Minimální kostra grafu – formulace matematického modelu

- **Proměnné**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li hrana } (i, j) \text{ vybrána} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, ..., n)$$

$$y_{ij} = \text{ hodnota toku z uzlu } i \text{ do uzlu } j \qquad (i, j = 1, 2, ..., n)$$

- **Model**

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 2, 3, \ldots n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} - \sum_{j=1}^{n} y_{ji} = 1 \qquad i = 2, 3, \ldots n,$$

$$y_{ij} \le (n-1)\, x_{ij} \qquad i, j = 1, 2, \ldots n,$$

$$x_{ij} \in \mathbf{B} \qquad i, j = 1, 2, \ldots n,$$

$$y_{ij} \in \mathbf{R}_{+} \qquad i, j = 1, 2, \ldots n.$$

```
TITLE MinimalniKostra;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="MinimalniKostra.xlsx";
EXCELSHEETNAME="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("uzel");
j:=i;

DATA
c[i,j]:=EXCELRANGE("vzdalenost");
n:=count(i);

BINARY VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("kabel");

VARIABLES
y[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("tok");

MODEL

MIN z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(c*x) ;

SUBJECT TO
zUzlu1:              sum(j:x[i:=1,j])=0;
ProtiCyklu[i>1]:     sum(j:x[i,j])=1;
Souvislost[i>1]:     sum(j:y[i,j])-sum(j:y[i:=j,j:=i])=1;
BilanceToku[i,j]:    y<=x*(n-1);

END
```

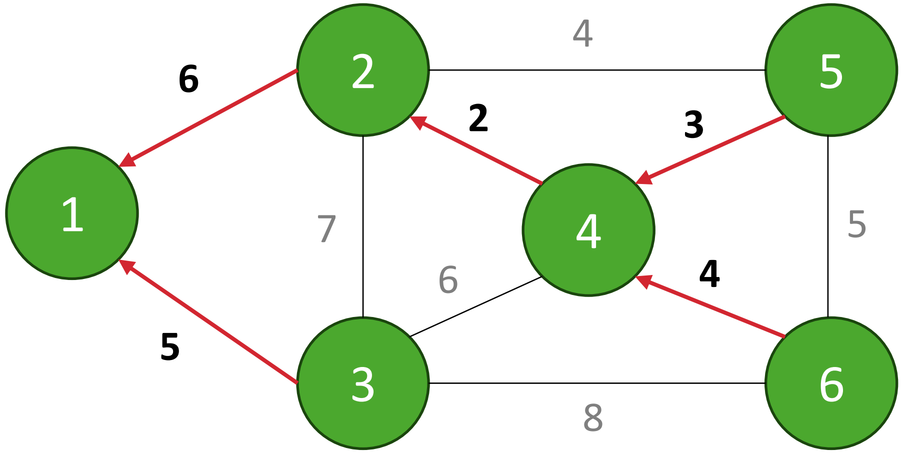
Úlohy na grafech

Škoda Auto Vysoká škola

Minimální kostra grafu – řešení

- **Optimální řešení**
  - Hodnota účelové funkce

$$z_0 = 20 \qquad \text{(minimální délka kabelů)}$$



Tabule	1	2	3	4	5	6
1	0	6	5	100	100	100
2	6	0	7	2	4	100
3	5	7	0	6	100	8
4	100	2	6	0	3	4
5	100	4	100	3	0	5
6	100	100	8	4	5	0

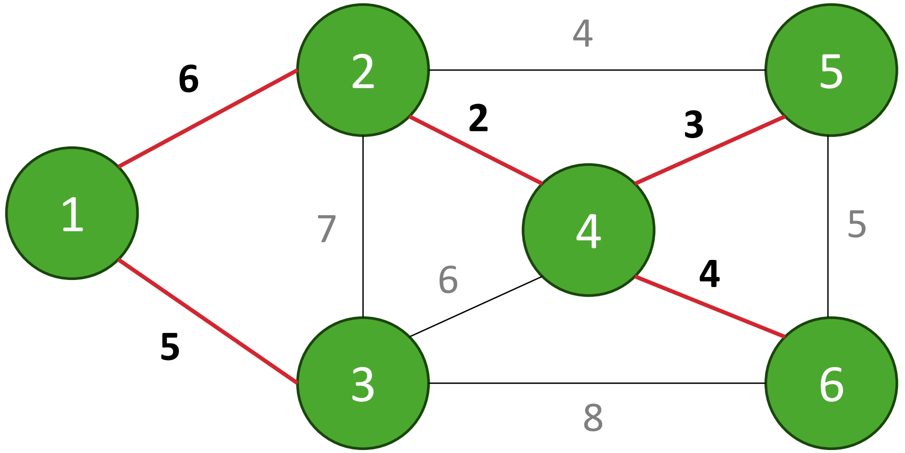
```
SOLUTION RESULT

  Optimal integer solution found

    MIN z              =          20.0000

DECISION VARIABLES

VARIABLE x[i,j] :

    i  j            Activity      Reduced Cost
  --------------------------------------------
   2  1             1.0000           6.0000
   3  1             1.0000           5.0000
   4  2             1.0000           2.0000
   5  4             1.0000           3.0000
   6  4             1.0000           4.0000
  --------------------------------------------

VARIABLE y[i,j] :

    i  j            Activity      Reduced Cost
  --------------------------------------------
   2  1             4.0000           0.0000
   3  1             1.0000           0.0000
   4  2             3.0000           0.0000
   5  4             1.0000           0.0000
   6  4             1.0000           0.0000
  --------------------------------------------
```

Úlohy na grafech

Minimální kostra grafu – řešení

- **Optimální řešení**
  - Hodnota účelové funkce

$$z_0 = 20 \qquad \text{(minimální délka kabelů)}$$

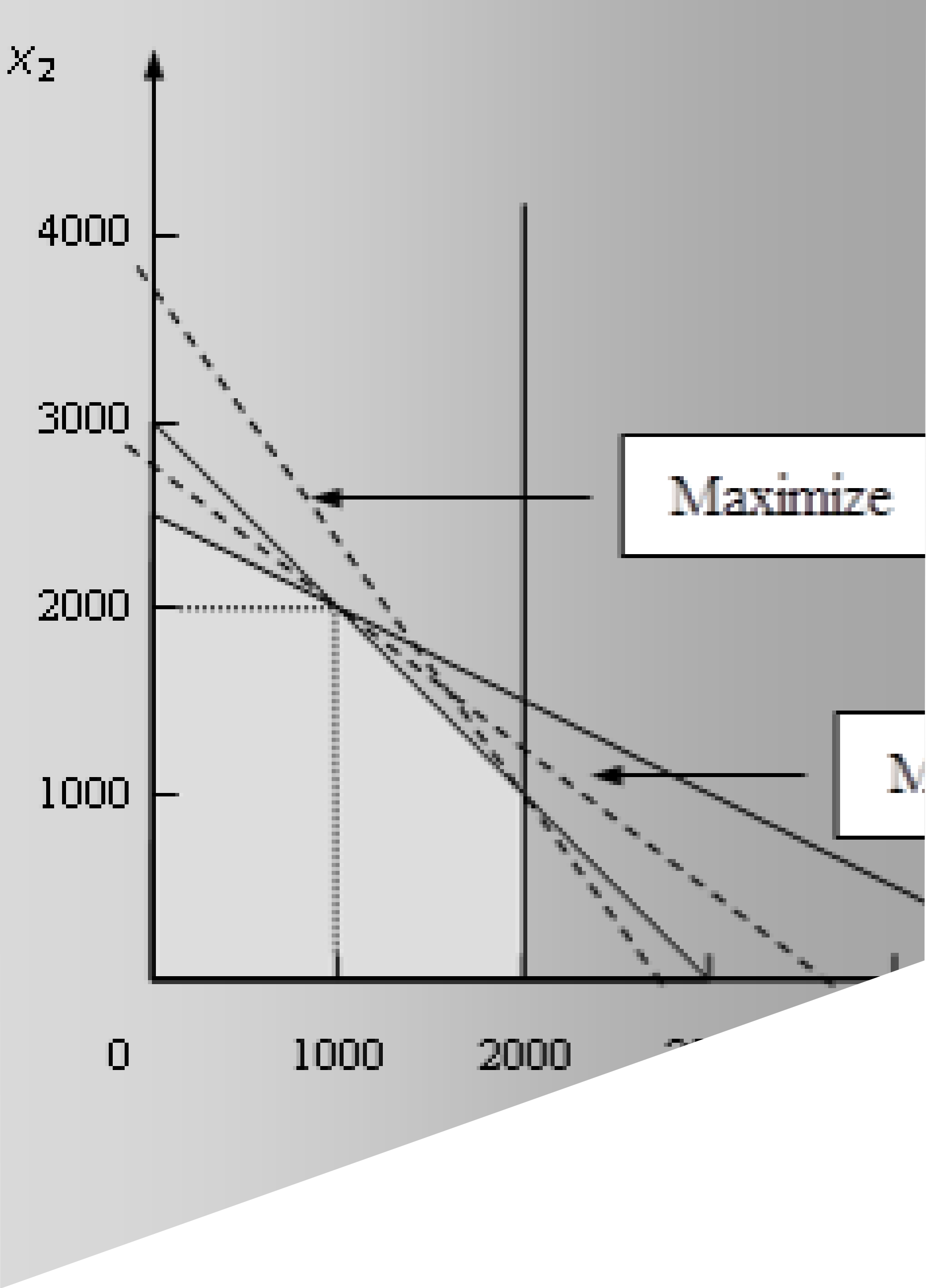


Tabule	1	2	3	4	5	6
1	0	6	5	100	100	100
2	6	0	7	2	4	100
3	5	7	0	6	100	8
4	100	2	6	0	3	4
5	100	4	100	3	0	5
6	100	100	8	4	5	0

```
SOLUTION RESULT

  Optimal integer solution found

    MIN z                  =          20.0000

DECISION VARIABLES

VARIABLE x[i,j] :

    i  j             Activity      Reduced Cost
  ---------------------------------------------
    2  1              1.0000          6.0000
    3  1              1.0000          5.0000
    4  2              1.0000          2.0000
    5  4              1.0000          3.0000
    6  4              1.0000          4.0000
  ---------------------------------------------

VARIABLE y[i,j] :

    i  j             Activity      Reduced Cost
  ---------------------------------------------
    2  1              4.0000          0.0000
    3  1              1.0000          0.0000
    4  2              3.0000          0.0000
    5  4              1.0000          0.0000
    6  4              1.0000          0.0000
  ---------------------------------------------
```

5

Dopravní a okružní úlohy



Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Dopravní problém

- **Zadání úlohy**
  - Přeprava homogenního produktu.
  - Množina dodavatelů s omezenou kapacitou.
  - Množina odběratelů s poptávkou (požadavkem).
  - Jednotkové přepravní náklady pro všechny dvojice dodavatelů a odběratelů.
  - Cílem je uspokojit požadavky všech odběratelů při minimálních celkových přepravních nákladech, přičemž nesmí být překročena kapacita žádného z dodavatelů.
- **Typy dopravních problémů**
  - Vyrovnaný – celková kapacita je rovna celkovému požadavku.
  - Nevyrovnaný – celková kapacita se liší od celkového požadavku. Existuje možnost převést problém na vyrovnaný:
    - přidáním fiktivního odběratele,
    - nalezením dodatečného dodavatele nebo přidáním fiktivního dodavatele (s možností neuspokojení požadavku).

Dopravní a okružní úlohy

Dopravní problém

- **Příklad**
  - Firma vyrábějící ropné produkty zřizuje čtyři nové čerpací stanice v Táboře, Příbrami, Jindřichově Hradci a Písku.
  - Produktem je benzín, ten se bude dovážet ze skladů v Plzni, Českých Budějovicích a Jihlavě.

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Dopravní problém

- **Příklad**
  - V tabulce jsou uvedeny týdenní kapacity skladů a plánované týdenní požadavky čerpacích stanic (**v hektolitrech**). Přeprava benzínu se bude uskutečňovat po silnici (jednou týdně). Tabulka obsahuje jednotkové náklady na přepravu **jednoho hektolitru** benzínu od dodavatelů k odběratelům (v Kč).
  - Cílem je naplánovat přepravu benzínu tak, aby celkové přepravní náklady byly minimální. Plán musí splňovat požadavky každé čerpací stanice a nesmí překročit kapacitu žádného ze skladů.

Dodavatel \ Odběratel	Tábor	Příbram	Jindřichův Hradec	Písek	Kapacita (hektolitry)
Plzeň	10	8	20	9	110
České Budějovice	9	13	6	13	160
Jihlava	7	11	10	18	180
Poptávka (hektolitry)	90	130	80	120	

Dopravní a okružní úlohy

Dopravní problém

- **Příklad**
  - Vyrovnání dopravního problému přidáním fiktivního odběratele.

Dodavatel \ Odběratel	Tábor	Příbram	Jindřichův Hradec	Písek	Fiktivní odběratel	Kapacita (hektolitry)
Plzeň	10	8	20	9	0	110
České Budějovice	9	13	6	13	0	160
Jihlava	7	11	10	18	0	180
Poptávka (hektolitry)	90	130	80	120	30	

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Dopravní problém – přípustné řešení

- **Metoda severozápadního rohu**
  1. Do severozápadního rohu (levého horního políčka) tabulky dosadíme maximální možné množství.
  2. Upravíme kapacitu a požadavek tak, že vypočtený objem přepravy odečteme od příslušné kapacity a požadavku.
  3. Pokud je požadavek pro první buňku uspokojen, přesuneme se horizontálně na další buňku ve druhém sloupci.
  4. Pokud je kapacita pro první řádek vyčerpána, posuneme se na první buňku druhého řádku.
  5. Pokud je v jakékoli buňce kapacita rovna požadavku, přesuneme se na další možné místo v následujícím řádku nebo sloupci.
  6. Pokračujeme až do vyplnění celé tabulky.

Dodavatel \ Odběratel	Tábor	Příbram	Jindřichův Hradec	Písek	Fiktivní odběratel	Kapacita (hektolitry)
Plzeň	90	20	0	0	0	110
České Budějovice	0	110	50	0	0	160
Jihlava	0	0	30	120	30	180
Poptávka (hektolitry)	90	130	80	120	30	

- Hodnota účelové funkce

$$z = 5250$$

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Dopravní problém – přípustné řešení

- **Metoda maticového minima**
  1. Vybíráme vždy políčko s minimálními náklady ze všech dosud neobsazených políček.
  2. V prvním kroku přiřadíme přepravu dvojici s minimálními jednotkovými přepravními náklady. Hodnota přepravy je rovna minimu zbývající kapacity a zbývajícího požadavku pro tuto dvojici.
  3. V dalším kroku snížíme zbývající kapacitu a zbývající požadavek (pro dvojici dodavatele a odběratele) o vypočítanou hodnotu přepravy.
  4. Přípustné řešení je nalezeno, jsou-li uspokojeny všechny požadavky, pokud ne, pokračujeme od prvního kroku.

Dodavatel \ Odběratel	Tábor	Příbram	Jindřichův Hradec	Písek	Fiktivní odběratel	Kapacita (hektolitry)
Plzeň	0	110	0	0	0	110
České Budějovice	0	0	80	80	0	160
Jihlava	90	20	0	40	30	180
Poptávka (hektolitry)	90	130	80	120	30	

- Hodnota účelové funkce

$$z = 3970$$

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Dopravní problém

- **Obecný matematický model**

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \qquad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \in \mathbf{R}_+ \qquad i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n.$$

```
TITLE DopravniProblem;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="DP.xlsx";
EXCELSHEETNAME="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("dodavatel");
j:=EXCELRANGE("odberatel");

DATA
a[i]:=EXCELRANGE("kapacita");
b[j]:=EXCELRANGE("pozadavek");
c[i,j]:=EXCELRANGE("naklady");

VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("preprava");

MODEL
MIN z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(c*x)

SUBJECT TO

dodavatel[i]:  sum(j:x[i,j])<=a[i];
odberatel[j]:  sum(i:x[i,j])=b[j];

END
```

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Dopravní problém – optimální řešení

- **Optimální řešení**
  - Proměnné

Dodavatel \ Odběratel	Tábor	Příbram	Jindřichův Hradec	Písek	Kapacita (hektolitry)
Plzeň	0	40	0	70	110
České Budějovice	0	0	80	50	160
Jihlava	90	90	0	0	180
Poptávka (hektolitry)	90	130	80	120	

  - Hodnota účelové funkce

    $z_0 = 3700$ (minimální celkové přepravní náklady)

  - Přídatné proměnné

    $v_2 = 30$ (zbyde ve skladu v Českých Bedějovicích)

Dopravní a okružní úlohy

Kontejnerový dopravní problém

- Vychází z dopravního problému.
- K přepravě jsou využívány kontejnery stejné kapacity.
- Přepravní náklady nejsou vztaženy na přepravovanou jednotku, ale na přepravu jednoho kontejneru mezi dodavatelem a odběratelem.
- Cílem je určit objem přepravy mezi dodavatelem a odběratelem a počet kontejnerů použitých k přepravě při minimálních celkových přepravních nákladech

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Kontejnerový dopravní problém

- **Příklad**
  - Předpokládejme, že si v předešlém příkladu bude přepravní společnost účtovat ceny za přepravu (pronájem) jedné cisterny mezi jednotlivými dodavateli a odběrateli.
  - K přepravě lze použít cisterny o kapacitě 20 hl.
  - Cílem je jednak určit, kolik litrů benzínu se bude přepravovat mezi jednotlivými místy, ale také stanovit, kolik cisteren bude na tuto přepravu použito, aby i v tomto případě byly celkové přepravní náklady minimální.

Dodavatel \ Odběratel	Tábor	Příbram	Jindřichův Hradec	Písek	Kapacita (hektolitry)
Plzeň	210	130	420	190	110
České Budějovice	170	260	130	260	160
Jihlava	150	210	180	340	180
Poptávka (hektolitry)	90	130	80	120	

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Kontejnerový dopravní problém – formulace matematického modelu

- Matematický model vychází z matematického modelu dopravního problému.
- **Proměnné**

$$x_{ij} = \text{ objem přepravy } (\text{např. v hl}) \text{ od } i\text{-tého dodavatele k } j\text{-tému odběrateli}$$

$$y_{ij} = \text{ počet kontejnerů, které budou použity k přepravě od } i\text{-tého dodavatele k } j\text{-tému odběrateli}$$

- **Účelová funkce**

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_{ij} \rightarrow \min$$

- **Omezující podmínky**
  - K podmínkám v dopravním problému je nutné přidat následující omezující podmínky:

$$x_{ij} \le K y_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$y_{ij} \in \mathbf{Z}_+ \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

```
TITLE KontejnerovyDopravniProblem;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="KDP.xlsx";
EXCELSHEETNAME="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("dodavatel");
j:=EXCELRANGE("odberatel");

DATA
a[i]:=EXCELRANGE("kapacita");
b[j]:=EXCELRANGE("pozadavek");
c[i,j]:=EXCELRANGE("naklady");
K:=EXCELRANGE("cisterna");

VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("preprava");

INTEGER VARIABLES
y[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("cisterny");

MODEL
MIN z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(c*y)

SUBJECT TO

dodavatel[i]:  sum(j:x[i,j])<=a[i];
odberatel[j]:  sum(i:x[i,j])=b[j];
cisterny[i,j]: x<=K*y;

END
```

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Kontejnerový dopravní problém – optimální řešení

- **Optimální řešení**
  - Proměnné (převezený objem)

Dodavatel \ Odběratel	Tábor	Příbram	Jindřichův Hradec	Písek	Kapacita (hektolitry)
Plzeň	0	70	0	40	110
České Budějovice	0	0	80	80	160
Jihlava	90	60	0	0	180
Poptávka (hektolitry)	90	130	80	120	

  - Hodnota účelové funkce

    $z_0 = 3840$ (minimální celkové přepravní náklady)

  - Přídatné proměnné

    $v_3 = 30$ (zbyde ve skladu v Jihlavě)

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Kontejnerový dopravní problém – optimální řešení

- **Optimální řešení**
  - Proměnné (počet cisteren)

Dodavatel \ Odběratel	Tábor	Příbram	Jindřichův Hradec	Písek	Kapacita (hektolitry)
Plzeň	0	4	0	2	110
České Budějovice	0	0	4	4	160
Jihlava	5	3	0	0	180
Poptávka (hektolitry)	90	130	80	120	

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Rozšířená úloha batohu

- **Zadání úlohy RUB I**
  - Je dána množina n předmětů, které mohou být umístěny do m kontejnerů.
  - Je dána hmotnost předmětu j, kterou označíme w_j a jeho hodnota c_j.
  - Kontejner i má nosnost K_i.
  - Cílem je maximalizovat celkovou hodnotu všech vybraných položek.

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Rozšířená úloha batohu – RUB I

- **Proměnné**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže předmět } j \text{ je umístěn do kontejneru } i \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- **Model**

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_j x_{ij} \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \le K_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_{ij} \in \mathbf{B} \qquad i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

```
TITLE RozsirenaUlohaBatohuI;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="RUBI.xlsx";
EXCELSHEETNAME="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("kontejner");
j:=EXCELRANGE("produkt");

DATA
w[j]:=EXCELRANGE("hmotnost");
c[j]:=EXCELRANGE("hodnota");
K[i]:=EXCELRANGE("nosnost");


BINARY VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("nalozeni");

MODEL
MAX z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(c*x);

SUBJECT TO
produkt[j]:    sum(i:x[i,j])<=1;
kontejner[i]:  sum(j:w[j]*x[i,j])<=K[i];

END
```

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Rozšířená úloha batohu (RUB I) – optimální řešení

- **Optimální řešení**
  - Umístění produktů v kontejnerech

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1			Produkt	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20
2			Hmotnost	10	7	6	12	5	9	11	3	12	7	9	13	12	7	5	4	9	8	4	15
3			Hodnota	80	130	80	100	30	70	150	30	140	80	110	130	110	80	70	30	120	100	60	170
4	Kontejner	Nosnost																					
5	K1	25		0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
6	K2	20		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	K3	28		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
8	K4	30		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0
9	K5	27		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
10																							
11	Celkem	1560																					

  - Hmotnost nákladu v kontejnerech

4	Kontejner	Nosnost	Náklad
5	K1	25	25
6	K2	20	20
7	K3	28	28
8	K4	30	29
9	K5	27	27

Dopravní a okružní úlohy

Rozšířená úloha batohu

- **Zadání úlohy 2.**
  - Je dána množina n typů předmětů, které mají být převezeny s využitím m kontejnerů s identickou nosností K.
  - Pro typ předmětu j je dána jeho hmotnost w_j a počet r_j, který má být převezen.
  - Cílem je minimalizovat počet použitých kontejnerů k přepravě všech předmětů.

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Rozšířená úloha batohu – RUB II

- **Příklad**
  - Klientům společnosti je nutné přepravit produkty za použití identických kontejnerů. V tabulce je pro každý typ produktu dána jeho hmotnost (v kg) a počet, který se má přepravit. Nosnost kontejneru je 500 kg.
  - Cílem je minimalizovat počet použitých kontejnerů.

Kontejnery	Hmotnost	Počet
Produkt 1	20	13
Produkt 2	22	15
Produkt 3	18	25
Produkt 4	15	30
Produkt 5	21	18
Produkt 6	16	35

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Rozšířená úloha batohu – RUB II

- **Proměnné**

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{jestliže kontejner } i \text{ je použitý} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \text{ počet položek typu } j \text{ umístěných do kontejneru } i$$

- **Model**

$$z = \sum_{i=1}^{m} x_i \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} = r_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j y_{ij} \leq K x_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_i \in \mathbf{B} \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$y_{ij} \in \mathbf{Z}_+ \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

```
TITLE RozsirenaUlohaBatohuII;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="RUBII.xlsx";
EXCELSHEETNAME="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("kontejner");
j:=EXCELRANGE("produkt");

DATA
w[j]:=EXCELRANGE("hmotnost");
r[j]:=EXCELRANGE("pocet");
K:=EXCELRANGE("nosnost");


BINARY VARIABLES
x[i] EXPORT TO EXCELRANGE("vyuzity");

INTEGER VARIABLES
y[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("nalozeni");

MODEL
MIN z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(x);

SUBJECT TO
produkt[j]:    sum(i:y[i,j])=r[j];
kontejner[i]:  sum(j:w[j]*y[i,j])<=K*x[i];

END
```

Dopravní a okružní úlohy

Rozšířená úloha batohu (RUB II) – optimální řešení

- **Optimální řešení**
  - Hodnota účelové funkce

$z_0 = 5$ (minimální počet kontejnerů)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Produkt	P1	P2	P3	P4	P5	P6		Nosnost
2	Hmotnost	20	22	18	15	21	16		500
3	Pocet	13	15	25	30	18	35		
4									
5	Kontejner	Počty produktů						Využitý	Vytíženost
6	K1	0	0	0	30	0	0	1	450
7	K2	13	0	0	0	11	0	1	491
8	K3	0	0	25	0	2	0	1	492
9	K4	0	15	0	0	5	4	1	499
10	K5	0	0	0	0	0	31	1	496
11	K6	0	0	0	0	0	0	0	0
12									
13	Celkem	5							

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Hledání nejkratší cesty

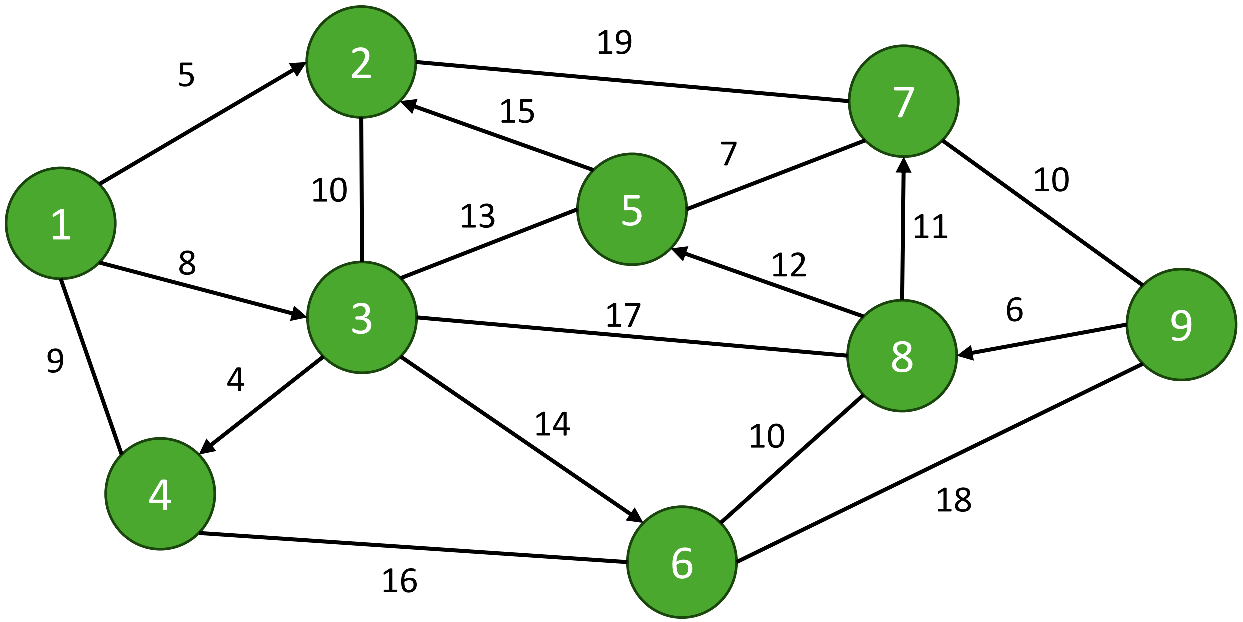
- Cílem je najít nejkratší cestu mezi dvojicí uzlů.
- Úloha řešená na každodenní bázi při používání navigace v autě či hledání spojení na některém mapovém portálu.
- Existuje mnoho algoritmů, s jejichž pomocí lze snadno najít všechny vzdálenosti mezi všemi dvojicemi uzlů v zadaném grafu. Dijkstrův algoritmus je určen pro hledání nejkratších cest z jednoho konkrétního uzlu do všech ostatních uzlů v grafu. Lze jej použít opakovaně pro různé výchozí uzly.
- Pro řešení lze využít i jednoduchého matematického modelu.

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Hledání nejkratší cesty

- **Příklad**
  - Distribuční firma získala zakázku, v níž musí přepravit náklad o nadměrné hmotnosti z místa 1 do místa 9.
  - U všech hran v grafu jsou uvedeny vzdálenosti v kilometrech. Vzhledem k tomu, že na některých silnicích existují úseky s nebezpečným klesáním, může se v nich přeprava uskutečnit jen v jednom směru, což je znázorněno orientovanými hranami.
  - Cílem je při přepravě nákladu ujet minimální vzdálenost.



Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Hledání nejkratší cesty

- **Tabulka s délkami hran**

Hrany	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1000	5	8	9	1000	1000	1000	1000	1000
2	1000	1000	10	1000	1000	1000	19	1000	1000
3	1000	10	1000	4	13	14	1000	17	1000
4	9	1000	1000	1000	1000	16	1000	1000	1000
5	1000	15	13	1000	1000	1000	7	1000	1000
6	1000	1000	1000	16	1000	1000	1000	10	18
7	1000	19	1000	1000	7	1000	1000	1000	10
8	1000	1000	17	1000	12	10	11	1000	1000
9	1000	1000	1000	1000	1000	18	10	6	1000

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Hledání nejkratší cesty – matematický model

- **Proměnné**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže vozidlo pojede z místa } i \text{ do místa } j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- **Model**

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s \\ -1 & i = d, \\ 0 & i = 1,2,\ldots,n, i \notin \{s,d\} \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \mathbf{B} \quad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

```
TITLE NejkratsiCesta;

OPTIONS
ExcelWorkBook="NejkratsiCesta.xlsx";
ExcelSheetName="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("obec");
j:=i;
s[i]:=EXCELRANGE("s");
d[i]:=EXCELRANGE("d");
prubezne[i]:= i-s-d;

DATA
c[i,j]:=EXCELRANGE("vzdalenost");

BINARY VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("cesta");


MODEL
MIN z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(c*x);

SUBJECT TO

vychoziObec[i in s]:          sum(j:x[i,j])-sum(j:x[i:=j,j:=i])=1;
cilovaObec[i in d]:           sum(j:x[i,j])-sum(j:x[i:=j,j:=i])=-1;
prubezneObce[i in prubezne]:  sum(j:x[i,j])-sum(j:x[i:=j,j:=i])=0;

END
```

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Hledání nejkratší cesty – optimální řešení

- **Optimální řešení**
  - Hodnota účelové funkce
    $z_0 = 34$
  - Hrany na cestě

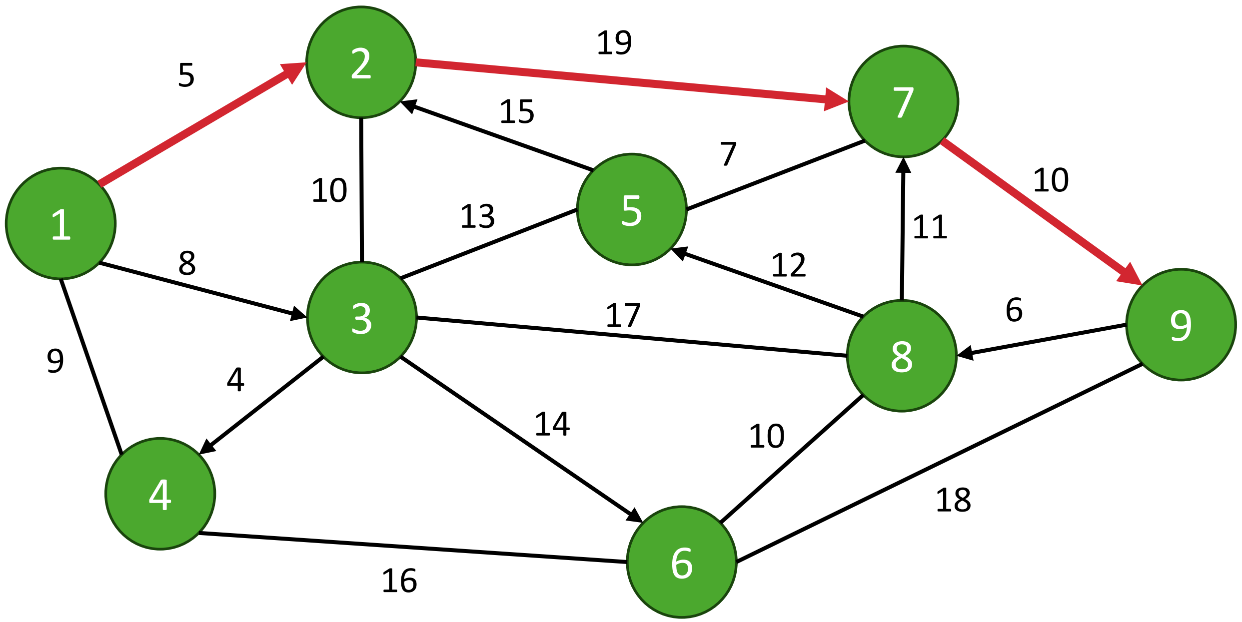
Hrany	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Dopravní a okružní úlohy

Hledání nejkratší cesty – optimální řešení

- **Optimální řešení**
  - Hodnota účelové funkce

    $z_0 = 34$
  - Hrany na cestě



Dopravní a okružní úlohy

Úloha obchodního cestujícího

- **Zadání úlohy**
  - Zadána množina míst.
  - Každé místo musí být navštíveno právě jednou.
  - Výsledná trasa tvoří okruh (cyklus) se začátkem a koncem ve výchozím místě (index 1).
  - Cílem je minimalizovat celkovou délku trasy, celkový čas nebo celkové náklady.

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha obchodního cestujícího – matematický model

- **Proměnné**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže vozidlo jede přímo z uzlu } i \text{ do uzlu } j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$u_i = \text{umělá proměnná v omezujících podmínkách zabraňujících vytváření parciálních cyklů}$$

- **Model**

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,2,\dots,n, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,2,\dots,n,$$

$$u_i + 1 - (n-1)(1-x_{ij}) \le u_j \qquad i = 1,2,\dots,n;\; j = 2,3,\dots,n,$$

$$x_{ij} \in \mathbb{B} \qquad i = 1,2,\dots,n;\; j = 1,2,\dots,n,$$

$$u_i \in \mathbf{R}_+ \qquad i = 1,2,\dots,m.$$

```
TITLE TSP;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="TSP.xlsm";
EXCELSHEETNAME="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("obec");
j:=i;

DATA
c[i,j]:=EXCELRANGE("vzdalenost");
n:=count(i)-1;

BINARY VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("trasa");

VARIABLES
u[i] EXPORT TO EXCELRANGE("poradi");

MODEL
MIN z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(c*x);

SUBJECT TO
zObce[i]:                   sum(j:x[i,j])=1;
doObce[j]:                  sum(i:x[i,j])=1;
parcialniCykly[i,j>1]: u[i]+1-n*(1-x[i,j])<=u[j];

END
```

Dopravní a okružní úlohy

Úloha obchodního cestujícího

- **Příklad**
  - Obchodní zástupce pivovaru ve Velvarech musí navštívit 7 restaurací v 7 obcích.
  - V tabulce jsou uvedeny vzdálenosti (v km) odpovídající přímým spojením obcí (silnicemi). Pomlčka odpovídá situaci, kdy obce nejsou přímo spojeny silnicí.
  - Cílem je navštívit všechny restaurace a ujet přitom minimální vzdálenost.

Obec	Velvary	Kralupy	Libcice	Slaný	Zlonice	Vraný	Bříza	Veltrusy
Velvary	0	8	-	13	10	-	12	9
Kralupy	8	0	6	16	-	-	-	4
Libcice	-	6	0	-	-	-	-	-
Slaný	13	16	-	0	7	-	-	-
Zlonice	10	-	-	7	0	7	13	-
Vraný	-	-	-	-	7	0	15	-
Bříza	12	-	-	-	13	15	0	13
Veltrusy	9	4	-	-	-	-	13	0

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha obchodního cestujícího

- **Příklad**
  - Tabulka obsahuje matici vzdáleností mezi dvojicemi míst.

Obec	Velvary	Kralupy	Libcice	Slaný	Zlonice	Vraný	Bříza	Veltrusy
Velvary	0	8	14	13	10	17	12	9
Kralupy	8	0	6	16	18	25	17	4
Libcice	14	6	0	22	24	31	23	10
Slaný	13	16	22	0	7	14	20	20
Zlonice	10	18	24	7	0	7	13	19
Vraný	17	25	31	14	7	0	15	26
Bříza	12	17	23	20	13	15	0	13
Veltrusy	9	4	10	20	19	26	13	0

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha obchodního cestujícího – přípustné řešení

- **Metoda nejbližšího souseda**
  1. Vybereme jakékoli místo jako výchozí.
  2. Najdeme nejbližší místo (z těch, která nebyla dosud zařazena do okruhu) k poslednímu místu na trase a zařadíme jej do trasy. Pokud takové místo neexistuje, pak uzavřeme trasu zařazením výchozího místa na její konec a pokračujeme krokem 4.
  3. Pokračujeme krokem 2.
  4. Konec.

- Hodnota účelové funkce

$$z = 85$$

Obec	Velvary	Kralupy	Libcice	Slaný	Zlonice	Vraný	Bříza	Veltrusy
Velvary	0	8	14	13	10	17	12	9
Kralupy	8	0	6	16	18	25	17	4
Libcice	14	6	0	22	24	31	23	10
Slaný	13	16	22	0	7	14	20	20
Zlonice	10	18	24	7	0	7	13	19
Vraný	17	25	31	14	7	0	15	26
Bříza	12	17	23	20	13	15	0	13
Veltrusy	9	4	10	20	19	26	13	0

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha obchodního cestujícího – optimální řešení

- **Optimální řešení**
  - Hodnota účelové funkce

    $z_0 = 79$

Obec	Velvary	Kralupy	Libcice	Slaný	Zlonice	Vraný	Bříza	Veltrusy
Velvary	0	8	14	13	10	17	12	9
Kralupy	8	0	6	16	18	25	17	4
Libcice	14	6	0	22	24	31	23	10
Slaný	13	16	22	0	7	14	20	20
Zlonice	10	18	24	7	0	7	13	19
Vraný	17	25	31	14	7	0	15	26
Bříza	12	17	23	20	13	15	0	13
Veltrusy	9	4	10	20	19	26	13	0

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha obchodního cestujícího s časovými okny

- **Zadání úlohy**
  - Každý uzel i musí být navštíven v rámci časového intervalu $<e_i, l_i>$.
  - Vozidlo stráví v uzlu i daný čas S_i.
  - Hodnota d_{ij} představuje dobu přejezdu mezi uzly i a j.
  - Cílem je určit minimální Hamiltonův cyklus (z hlediska vzdálenosti) při respektování všech časových oken.

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha obchodního cestujícího s časovými okny – matematický model

- **Proměnné**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže vozidlo jede přímo z uzlu } i \text{ do uzlu } j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$t_i = \text{ čas příjezdu vozidla do uzlu } i$$

- **Model**
  - Proměnné u_i jsou eliminovány a omezující podmínky jsou nahrazeny podmínkami

$$t_i + S_i + d_{ij} - M(1 - x_{ij}) \leq t_j \qquad i = 1,2,\ldots,n; \; j = 2,3,\ldots,n; \quad i \neq j,$$

$$e_i \leq t_i \leq l_i \qquad i = 2,3,\ldots,n,$$

$$t_1 = 0,$$

$$t_i \in \mathbf{R}_+ \qquad i = 2,3,\ldots,n.$$

```
TITLE TSPTW;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="TSPTW.xlsx";
EXCELSHEETNAME="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("obec");
j:=i;

DATA
c[i,j]:=EXCELRANGE("vzdalenost");
e[i]:=EXCELRANGE("nejdrive");
l[i]:=EXCELRANGE("nejpozdeji");
S[i]:=EXCELRANGE("zdrzeni");
d[i,j]:=EXCELRANGE("cas");
M:=1000;

BINARY VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("trasa");

VARIABLES
t[i] EXPORT TO EXCELRANGE("prijezd");

MODEL
MIN z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(c*x);

SUBJECT TO
zObce[i]:           sum(j:x[i,j])=1;
doObce[j]:          sum(i:x[i,j])=1;
prejezd[i,j>1]:     t[i]+S[i]+d[i,j]-M*(1-x[i,j])<=t[j];
okno[i>1]:          e[i]<=t[i]<=l[i];
vychoziMisto:       t[1]=0;

END
```

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha obchodního cestujícího s časovými okny – optimální řešení

- **Optimální řešení**
  - Hodnota účelové funkce

$$z_0 = 100$$

21	Trasa	Velv	Kra	Lib	Sla	Zlo	Vra	Bri	Velt	Prijezd
22	Velvary	0	0	0	0	0	0	0	1	0
23	Kralupy	1	0	0	0	0	0	0	0	360
24	Libcice	0	0	0	1	0	0	0	0	99
25	Slany	0	0	0	0	0	1	0	0	146
26	Zlonice	0	0	0	0	0	0	1	0	268
27	Vrany	0	0	0	0	1	0	0	0	240
28	Briza	0	1	0	0	0	0	0	0	303
29	Veltrusy	0	0	1	0	0	0	0	0	60
30										
31	Celkem	100								

Trasa	Nejdrive	Nejpozdeji	Prijezd
Velvary	8:00	-	-
Veltrusy	9:00	11:00	9:00
Libcice	8:30	11:00	9:39
Slany	9:00	14:00	10:26
Vrany	9:00	12:00	12:00
Zlonice	11:30	15:00	12:28
Briza	13:00	15:30	13:03
Kralupy	14:00	16:00	14:00
Velvary	-	-	14:35

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Otevřená úloha obchodního cestujícího

- **Zadání úlohy**
  - Zadána množina míst.
  - Každé místo musí být navštíveno právě jednou.
  - Vozidlo se nevrací do výchozího místa (index 1).
  - Cílem je minimalizovat celkovou délku trasy, celkový čas nebo celkové náklady.

Dopravní a okružní úlohy

Otevřená úloha obchodního cestujícího – optimální řešení

- **Optimální řešení**
  - Hodnota účelové funkce

    $z_0 = 65$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Vzdalenost	Velv	Kra	Lib	Sla	Zlo	Vra	Bri	Velt	
2	Velvary	0	8	14	13	10	17	12	9	
3	Kralupy	0	0	6	16	18	25	17	4	
4	Libcice	0	6	0	22	24	31	23	10	
5	Slany	0	16	22	0	7	14	20	20	
6	Zlonice	0	18	24	7	0	7	13	19	
7	Vrany	0	25	31	14	7	0	15	26	
8	Briza	0	17	23	20	13	15	0	13	
9	Veltrusy	0	4	10	20	19	26	13	0	
10										
11	Trasa	Velv	Kra	Lib	Sla	Zlo	Vra	Bri	Velt	Pořadí
12	Velvary	0	0	0	1	0	0	0	0	0
13	Kralupy	0	0	1	0	0	0	0	0	6
14	Libcice	1	0	0	0	0	0	0	0	7
15	Slany	0	0	0	0	1	0	0	0	1
16	Zlonice	0	0	0	0	0	1	0	0	2
17	Vrany	0	0	0	0	0	0	1	0	3
18	Briza	0	0	0	0	0	0	0	1	4
19	Veltrusy	0	1	0	0	0	0	0	0	5
20										
21	Celkem	65								

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha obchodního cestujícího ve výrobě

- **Zadání úlohy**
  - Firma vyrábí užitkové sklo (kádinky, popelníky, láhve, misky, vázy a zkumavky).
  - Výrobní linka ze zásobárny odměřuje velikost kapky skla do lisu, na kterém je forma pro daný výrobek. V tabulce jsou zadány doby přestaveb (v hod) pro výměnu formy a nastavení velikosti kapky.
  - Firma chce minimalizovat náklady, které odpovídají prostojům v důsledku výměny formy a nastavení kapky.
    a) Výrobní dávka vždy začíná a končí výrobou kádinky.
    b) Výrobní dávka začíná výrobou kádinky a končí libovolným výrobkem.
    c) Výrobní dávka začíná výrobou kádinky a končí výrobou lahve.

Výrobek	Kádinka	Popelník	Láhev	Miska	Váza	Zkumavka
Kádinka	0	6	8	11	5	7
Popelník	4	0	2	7	4	7
Láhev	5	12	0	10	7	6
Miska	4	7	5	0	7	10
Váza	7	11	10	7	0	6
Zkumavka	10	7	15	13	15	0

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Úloha obchodního cestujícího ve výrobě – řešení

a) Výrobní dávka vždy začíná a končí výrobou kádinky.

Výrobek	Kádinka	Popelník	Láhev	Miska	Váza	Zkumavka
Kádinka	0	6	8	11	5	7
Popelník	4	0	2	7	4	7
Lahev	5	12	0	10	7	6
Miska	4	7	5	0	7	10
Váza	7	11	10	7	0	6
Zkumavka	10	7	15	13	15	0

Výrobek	Kádinka	Popelník	Láhev	Miska	Váza	Zkumavka	Pořadí
Kádinka	0	0	0	0	0	1	0
Popelník	0	0	1	0	0	0	2
Lahev	0	0	0	0	1	0	3
Miska	1	0	0	0	0	0	5
Váza	0	0	0	1	0	0	4
Zkumavka	0	1	0	0	0	0	1

- Hodnota účelové funkce $z_0 = 34$

```
TITLE Sklo1;

OPTIONS
ExcelWorkBook="Sklo.xlsx";
ExcelSheetName="MPL1";

INDEX
i:=EXCELRANGE("produkt");
j:=i;

DATA
c[i,j]:=EXCELRANGE("cas");
n:=count(i)-1;

BINARY VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("vyroba");

VARIABLES
u[i] EXPORT TO EXCELRANGE("poradi");

MODEL
MIN z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(c*x);

SUBJECT TO
zProduktu[i]:          sum(j:x[i,j])=1;
kProduktu[j]:          sum(i:x[i,j])=1;
parcialniCykly[i,j>1]: u[i]+1-n*(1-x[i,j])<=u[j];

END
```

Dopravní a okružní úlohy

Úloha obchodního cestujícího ve výrobě – řešení

Škoda Auto Vysoká škola

b) Výrobní dávka začíná výrobou kádinky a končí libovolným výrobkem.

Výrobek	Kádinka	Popelník	Láhev	Miska	Váza	Zkumavka
Kádinka	0	6	8	11	5	7
Popelník	0	0	2	7	4	7
Lahev	0	12	0	10	7	6
Miska	0	7	5	0	7	10
Váza	0	11	10	7	0	6
Zkumavka	0	7	15	13	15	0

Výrobek	Kádinka	Popelník	Láhev	Miska	Váza	Zkumavka	Pořadí
Kádinka	0	0	0	0	1	0	0
Popelník	0	0	1	0	0	0	3
Lahev	0	0	0	0	0	1	4
Miska	0	1	0	0	0	0	2
Váza	0	0	0	1	0	0	1
Zkumavka	1	0	0	0	0	0	5

- Hodnota účelové funkce $z_0 = 27$

```
TITLE Sklo2;

OPTIONS
ExcelWorkBook="Sklo.xlsx";
ExcelSheetName="MPL2";

INDEX
i:=EXCELRANGE("produkt");
j:=i;
v[i]:=EXCELRANGE("v");

DATA
c[i,j]:=EXCELRANGE("cas");
n:=count(i)-1;

BINARY VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("vyroba");

VARIABLES
u[i] EXPORT TO EXCELRANGE("poradi");

MODEL
MIN z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(c*x);

SUBJECT TO
zProduktu[i]:                              sum(j:x[i,j])=1;
kProduktu[j]:                              sum(i:x[i,j])=1;
parcialniCykly[i,j] WHERE (NOT (j IN v)): u[i]+1-n*(1-x[i,j])<=u[j];

END
```

Dopravní a okružní úlohy

Úloha obchodního cestujícího ve výrobě – řešení

c) Výrobní dávka začíná výrobou kádinky a končí výrobou lahve.

Výrobek	Kádinka	Popelník	Láhev	Miska	Váza	Zkumavka
Kádinka	0	6	8	11	5	7
Popelník	0	0	2	7	4	7
Lahev	0	12	0	10	7	6
Miska	0	7	5	0	7	10
Váza	0	11	10	7	0	6
Zkumavka	0	7	15	13	15	0

Výrobek	Kádinka	Popelník	Láhev	Miska	Váza	Zkumavka	Pořadí
Kádinka	0	0	0	0	1	0	0.
Popelník	0	0	0	1	0	0	3.
Lahev	1	0	0	0	0	0	5.
Miska	0	0	1	0	0	0	4.
Váza	0	0	0	0	0	1	1.
Zkumavka	0	1	0	0	0	0	2.

- Hodnota účelové funkce $z_0 = 30$

```
TITLE Sklo3;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="Sklo.xlsx";
EXCELSHEETNAME="MPL3";

INDEX
i:=EXCELRANGE("produkt");
j:=i;

DATA
c[i,j]:=EXCELRANGE("cas");
n:=count(i)-1;

BINARY VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("vyroba");

VARIABLES
u[i] EXPORT TO EXCELRANGE("poradi");

MODEL
MIN z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(c*x);

SUBJECT TO
zProduktu[i]:           sum(j:x[i,j])=1;
kProduktu[j]:           sum(i:x[i,j])=1;
parcialniCykly[i,j>1]: u[i]+1-n*(1-x[i,j])<=u[j];
x[3,1]=1;

END
```

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Rozvozní úloha

- **Zadání úlohy**
  - $G = \{U, E\}$ je úplný digraf se vzdáleností c_{ij} definovanou pro každou hranu (i, j).
  - Nechť uzel 1 je depo, v němž je k dispozici vozidlo s kapacitou V, $|U| = n$.
  - Každý zákazník i má požadavek o velikosti q_i.
  - Cílem je uspokojit požadavky všech zákazníků a minimalizovat celkovou délku všech tras.
- **Proměnné**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže vozidlo jede přímo z uzlu } i \text{ do uzlu } j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$u_i = \text{umělá proměnná zavedená pro bilanci nákladu vozidla}$$

- **Předpoklady**

$$\sum_{i=2}^{n} q_i > V,$$

$$q_i \le V \qquad i = 2, 3, \dots, n.$$

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Rozvozní úloha – matematický model

- **Model**

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 2,3,\ldots,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 2,3,\ldots,n,$$

$$u_i + q_j - V(1 - x_{ij}) \le u_j \qquad i = 1,2,\ldots,n;\; j = 2,3,\ldots,n,$$

$$u_i \le V \qquad i = 2,3,\ldots,n,$$

$$u_1 = 0,$$

$$x_{ij} \in \mathbb{B} \qquad i = 1,2,\ldots,n;\; j = 1,2,\ldots,n,$$

$$u_i \in \mathbf{R}_+ \qquad i = 2,3,\ldots,n.$$

```
TITLE VRP;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="VRP.xlsx";
EXCELSHEETNAME="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("obec");
j:=i;

DATA
c[i,j]:=EXCELRANGE("vzdalenost");
q[i]:=EXCELRANGE("pozadavek");
V:=EXCELRANGE("kapacita");


BINARY VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("trasy");

VARIABLES
u[i] EXPORT TO EXCELRANGE("naklad");

MODEL
MIN z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(c*x);

SUBJECT TO
z0bce[i>1]:             sum(j:x[i,j])=1;
do0bce[j>1]:            sum(i:x[i,j])=1;
bilanceNakladu[i,j>1]:  u[i]+q[j]-V*(1-x[i,j])<=u[j];
kapacita[i>1]:          u[i]<V;
vychozi:                u[1]=0;

END
```

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Rozvozní úloha

- **Příklad**
  - Obchodní zástupce pivovaru uzavřel se všemi restauracemi výhodné smlouvy.
  - V tabulce jsou uvedeny počty sudů, které budou restaurace pravidelně odebírat. Pro rozvoz bude použito vozidlo s kapacitou 50 sudů.
  - Cílem je uspokojit všechny požadavky s minimální délkou všech tras.

	Požadavek
Velvary	0
Kralupy	18
Libcice	10
Slany	15
Zlonice	12
Vrany	10
Briza	8
Veltrusy	11

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Rozvozní úloha – optimální řešení

- **Optimální řešení**
  - Hodnota účelové funkce

    $z_0 = 87$

Trasa1	Požadavek
Velvary	0
Kralupy	18
Libcice	10
Veltrusy	11
Velvary	0
Celkem	39

Trasa1	Požadavek
Velvary	0
Briza	8
Vrany	10
Zlonice	12
Slany	15
Velvary	0
Celkem	45

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Přepravní problémy – úlohy vyzvednutí a doručení (PDP)

- **One-to-One PDP**
  - Každý požadavek je dán místem vyzvednutí a místem doručení. Trasy vozidel začínají a končí ve společném depu.
  - Úloha přepravy hendikepovaných osob, úloha kurýrní služby.
- **Many-to-Many PDP**
  - Zboží může být vyzvednuto v jednom z několika míst a doručeno do jednoho z několika míst (sdílená kola a koloběžky).
- **One-to-Many-to-One PDP**
  - Každý zákazník obdrží zásilku z depa a zašle do něj jinou zásilku (současný rozvoz piva a svoz prázdných sudů).

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Neorientovaná úloha čínského listonoše

- **Zadání úlohy**
  - $G = \{U, E\}$ je neorientovaný souvislý graf. Pro každou hranu $\{i, j\}$ jsou dány náklady c_{ij}.
  - Cílem je najít cyklus s minimálními celkovými náklady takový, že v něm bude obsažena každá hrana alespoň jednou.
- **Věta**
  - Neorientovaný graf G je eulerovský právě tehdy, když G je souvislý a všechny uzly mají sudý stupeň.
  - Pokud graf G není eulerovský, sestrojíme supergraf G^* grafu G takový, že G^* je eulerovský a obsahuje Eulerův cyklus, který je kratší než Eulerův cyklus v jakémkoli jiném supergrafu grafu G.

Dopravní a okružní úlohy

Neorientovaná úloha čínského listonoše

- **Příklad**
  - O halloweenském večeru děti chtějí navštívit všechny domy v přilehlém okolí. Tabulka obsahuje délky ulic (v metrech), kterými děti musí projít.
  - Naplánujte jim trasu tak, aby museli ujít co nejkratší vzdálenost.

Hrana	Délka	Hrana	Délka
(1,2)	210	(6,7)	80
(1,9)	160	(6,11)	150
(2,3)	140	(7,8)	80
(2,5)	80	(7,9)	110
(3,4)	40	(9,10)	160
(3,5)	210	(10,11)	130
(4,6)	310	(10,12)	190
(5,6)	70	(11,12)	150

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Neorientovaná úloha čínského listonoše – matematický model

- **Proměnné**

  x_{ij} = počet hran (i, j) v grafu G^*

- **Model**

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$x_{ij} + x_{ji} \geq r_{ij} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ji} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \in \mathbf{Z}_+ \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže existuje hrana } (i, j) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

```
TITLE UCPP;

OPTIONS
EXCELWORKBOOK="UCPP.xlsx";
EXCELSHEETNAME="MPL";

INDEX
i:=EXCELRANGE("uzel");
j:=i;

DATA
c[i,j]:=EXCELRANGE("delka");
r[i,j]:=EXCELRANGE("hrana");

INTEGER VARIABLES
x[i,j] EXPORT TO EXCELRANGE("pocet");

MODEL
MIN z EXPORT TO EXCELRANGE("celkem") =sum(c*x);

SUBJECT TO
hrana[i,j]:    x[i,j]+x[i:=j,j:=i]>=r[i,j];
Euler[i]:      SUM(j:x[i,j])=SUM(j:x[i:=j,j:=i]);

END
```

Dopravní a okružní úlohy

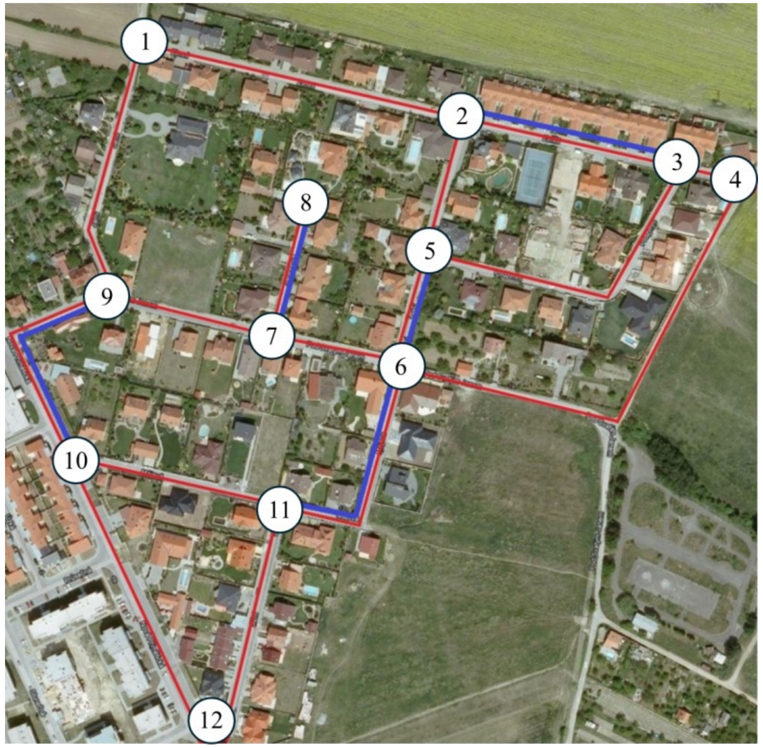
Škoda Auto Vysoká škola

Neorientovaná úloha čínského listonoše – optimální řešení

- **Optimální řešení**
  - Hodnota účelové funkce

$$z_0 = 2870$$

31	Počet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
32	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	2	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
34	3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
35	4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	5	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0
37	6	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
38	7	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
39	8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
40	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
41	10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
42	11	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
43	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
44													
45	Celkem	2870											



Trasa: 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 10, 9, 10, 11, 6, 5, 3, 2, 5, 6, 7, 8, 7, 9, 1.

Dopravní a okružní úlohy

Škoda Auto Vysoká škola

Další úlohy čínského listonoše

- **Orientovaná úloha čínského listonoše** (svoz odpadu v jednosměrných ulicích)
- **Smíšená úloha čínského listonoše** (čištění ulic)
- **Kapacitní úloha čínského listonoše** (svoz odpadu)
- **Úloha venkovského listonoše** (doručování pošty)
- **Asymetrická úloha čínského listonoše** (náklady závisí na směru jízdy vozidla)
- **Hierarchická úloha čínského listonoše** (odklízení sněhu pluhem)

Škoda Auto Vysoká škola

Děkuji za pozornost

Jan Fábry

Katedra řízení výroby, logistiky a kvality

fabry@savs.cz www.janfabry.cz

www.savs.cz